各点 Kan 拡張

山崎 晃司

2020 年 7 月 7 日

本紙の目的は次の定理を証明することである。

定理 1 (各点 Kan 拡張)**.** C, D, I を圏とし、$K : I \to C$ を関手とする。関手 $L : I \to D$ について、各対象 $c \in Ob(C)$ に対して $L_c = L \circ pr_2 : (c \downarrow K) \to I \to D$ が極限 $\varprojlim L_c$ を持ったとする。この時、L の K に沿った右 Kan 拡張 $\mathbb{R}_K L$ が存在し、自然に $\mathbb{R}_K L(c) \cong \varprojlim L_c$ である。（ここで、$(c \downarrow K)$ はコンマ圏である。）

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rrd, "\mathbb{R}_K L"] & & \\
I \arrow[u, "K"] \arrow[rr, "L"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & & D
\end{tikzcd}$$

この証明自体はそれほど難しいわけでもないのだが、条件を一つ一つ愚直に確かめていく面倒な方法しか私は知らない。本紙ではもう少し整理して、ファイバー圏の一般論を経由した証明を試みる。結局、同程度に面倒なのだが、ファイバー圏の言葉で書き直すことで証明に意味が見えるかもしれない。

参考にしたのは、圏論の基礎 [3, 4] と壱大整域 [2] と nLab[1] である。

1　随伴と Kan 拡張

定義 2. 次の図式で、$\mathbb{R}_K L$ は L の K に沿った右 *Kan* 拡張で、その単位射が ϵ であったとする。

$$\begin{tikzcd} C \arrow[drr, "\mathbb{R}_K L"] & & \\ I \arrow[u, "K"] \arrow[rr, "L"'] \arrow[r, phantom, "\epsilon\Downarrow"] & & D \arrow[r, "F"] & E \end{tikzcd}$$

関手 $F : D \to E$ が右 *Kan* 拡張 $\mathbb{R}_K L$ を保存するとは、$F_*(\epsilon)$ を単位射として $F \circ \mathbb{R}_K L$ が $F \circ L$ の K に沿った右 *Kan* 拡張となることである。

L の K に沿った右 *Kan* 拡張 $\mathbb{R}_K L$ が絶対右 *Kan* 拡張であるとは、任意の関手 $F : D \to E$ が右 *Kan* 拡張 $\mathbb{R}_K L$ を保存することである。

次の命題は、自然変換の水平合成（という基本的だが地味な概念）の説明が面倒なので、証明を省略する。[3, 4][1] を参考してもらいたい。証明自体に難しい点はない。

命題 3. 次の図式の K が左随伴 P を持つとき、またその時に限り、Id_I の K に沿った右 *Kan* 拡張 $\mathbb{R}_K Id_I$ が存在し、K によって保存される。

$$\begin{tikzcd} C \arrow[drr, "P \cong \mathbb{R}_K id"] & & \\ I \arrow[u, "K"] \arrow[rr, "Id_I"'] \arrow[r, phantom, "\epsilon\Downarrow"] & & I \arrow[r, "K"] & C \end{tikzcd}$$

さらにこの時、$P \cong \mathbb{R}_K Id_I$ で、右 *Kan* 拡張 $\mathbb{R}_K Id_I$ の単位射 ϵ は随伴 $P \dashv K$ の単位射であり、$\mathbb{R}_K Id_I$ は絶対右 *Kan* 拡張である。

2　ファイバー圏

定義 4 (デカルト射)**.** 関手 $p : E \to B$ に対し、E 上の射 $f : e_1 \to e_2$ がデカルト射 *(Cartesian morphism)* であるとは、次の図式が引き戻しになることである。

$$\begin{tikzcd} Hom_E(-, e_1) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "p"'] & Hom_E(-, e_2) \arrow[d, "p"] \\ Hom_B(p(-), p(e_1)) \arrow[r, "p(f)_*"] & Hom_B(p(-), p(e_2)) \end{tikzcd}$$

定義 5 (ファイバー圏)**.** 圏 B 上のファイバー圏 *(fibred category)* またはグロタンディーク束 *(Grothendieck fibration)* とは、次を満たす圏 E と関手 $p : E \to B$ の組 (p, E) であって、次を満たすものである。

> E 上の任意の対象 $e \in Ob(E)$ および B 上の任意の射 $f : \cdot \to p(e)$ に対し、デカルト射 $\tilde{f} : \cdot \to e$ であって $p(\tilde{f}) = f$ を満たすものが存在する。

[1] この証明が載っている節のタイトル、「全ての概念は Kan 拡張である (All Concepts are Kan Extensions)」は有名である。

例 6. 関手による次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "F"] & D \\ (F \downarrow G) \arrow[u] \arrow[r] & C_2 \arrow[u, "G"'] \end{tikzcd}$$

この時、コンマ圏 $(F \downarrow G)$ 上の対象 $F(c_1) \to G(c_2)$ および C_1 上の任意の射 $\cdot \to c_1$ に対し、次の図式は $(F \downarrow G)$ 上の射である。

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d] & F(\cdot) \arrow[r] \arrow[d] & G(c_2) \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, equal] & c_2 \arrow[d, "id"] \\ c_1 \arrow[r, dotted, no head] & F(c_1) \arrow[r] & G(c_2) \arrow[r, dotted, no head] & c_2 \end{tikzcd}$$

さらにこれはデカルト射である。すなわち、自然な射影 $pr_1 : (F \downarrow G) \to C_1$ は C_1 上のファイバー圏である。(一方、自然な射影 $pr_2 : (F \downarrow G) \to C_2$ はファイバー圏の双対である。ファイバー圏の双対は双対束 (opfibration) などと呼ばれる。)

以下の補題は後に強い形でまとめる。

補題 7. 関手と自然変換による次の図式のうち、$p : E \to B$ がファイバー圏であったとする。

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, "R"] & \\ E \arrow[u, "p"] \arrow[r, "L"'] \arrow[ur, phantom, "\epsilon \Downarrow"] & U \end{tikzcd}$$

さらに、任意の対象 $b \in Ob(B)$ に対して $R_b = R|_{\{b\}}$ と $\epsilon^b = \epsilon|_{p^{-1}(b)}$ の組が $p|_{p^{-1}(b)}$ に沿った $L|_{p^{-1}(b)}$ の右 Kan 拡張であったとする。(すなわち、$R_b \cong \varprojlim L|_{p^{-1}(b)}$ である。)

$$\begin{tikzcd} \{b\} \arrow[dr, "R_b"] & \\ p^{-1}(b) \arrow[u, "p|_{p^{-1}(b)}"] \arrow[r, "L|_{p^{-1}(b)}"'] \arrow[ur, phantom, "\epsilon^b \Downarrow"] & U \end{tikzcd}$$

この時、R は p に沿った L の右 Kan 拡張 $\mathbb{R}_p L$ である。

証明. 任意の関手 $F : B \to U$ と任意の自然変換 $\mu : F \circ p \to L$ をとる。μ が ϵ を通した分解を一意的に持つことを示せばよい。

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, "F"] & \\ E \arrow[u, "p"] \arrow[r, "L"'] \arrow[ur, phantom, "\mu \Downarrow"] & U \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} F \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, "\hat{\mu}"'] & F \circ p \arrow[d, "p^*(\hat{\mu})"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\ R \arrow[r, dotted, no head] & R \circ p \arrow[r, "\epsilon"'] & L \end{tikzcd}$$

$F_b = F(b)$, $\mu^b = \mu|_{p^{-1}(b)}$ と置く。まず、$\epsilon \circ p^*(\hat{\mu}) = \mu$ を満たす $\hat{\mu} : F \to R$ が存在したとすると、$\epsilon^b \circ p^*(\hat{\mu}|_{\{b\}}) = \mu^b$ を満たす必要がある。R_b と ϵ^b が右 Kan 拡張を定めることか

ら、このような $\hat{\mu}_b = \hat{\mu}|_{\{b\}} : F_b \to R_b$ は一意である。

$$
\begin{tikzcd}
\{b\} \arrow[drr, "F_b"] & & \\
p^{-1}(b) \arrow[u, "p"] \arrow[rr, "L"'] \arrow[r, phantom, "\mu^b \Downarrow"] & & U
\end{tikzcd}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{tikzcd}
F_b \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, "\hat{\mu}_b"'] & F_b \circ p \arrow[d, "p^*(\hat{\mu}_b)"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\
R_b \arrow[r, dotted, no head] & R_b \circ p \arrow[r, "\epsilon^b"'] & L
\end{tikzcd}
$$

よって、$\hat{\mu}$ は一意である。

逆に、上記の普遍性で $\hat{\mu}_b$ を定める。これが自然変換 $\hat{\mu} : F \to R$ を定めることを示せばよい。B 上の任意の射 $h : b_1 \to b_2$ をとる。示すべきは次の図式が可換となることである。

$$
\begin{tikzcd}
F(b_1) \arrow[r, "\hat{\mu}_{b_1}"] \arrow[d, "F(h)"'] & R(b_1) \arrow[d, "R(h)"] \\
F(b_2) \arrow[r, "\hat{\mu}_{b_2}"] & R(b_2)
\end{tikzcd}
$$

$\alpha = R(h) \circ \hat{\mu}_{b_1}$, $\beta = \hat{\mu}_{b_2} \circ F(h)$ として、$\alpha = \beta$ を示す。$R_2 b \cong \varprojlim L|_{p^{-1}(b_2)}$ の普遍性を利用して、$\epsilon^{b_2} \circ \alpha = \epsilon^{b_2} \circ \beta$ を示せばよい。$p^{-1}(b_2)$ 上の任意の対象 e_2 をとる。ファイバー圏の定義より、h のデカルト持ち上げ $\tilde{h} : e_1 \to e_2$ が存在する。ϵ の自然性より、次の図式が可換である。

$$
\begin{tikzcd}
R(b_1) \arrow[r, equal] \arrow[d, "R(h)"] & R(p(e_1)) \arrow[r, "\epsilon_{e_1}"] \arrow[d, "R(p(\tilde{h}))"'] & L(e_1) \arrow[d, "L(\tilde{h})"] \\
R(b_2) \arrow[r, equal] & R(p(e_2)) \arrow[r, "\epsilon_{e_2}"] & L(b_2)
\end{tikzcd}
$$

また、各 $\hat{\mu}_{b_i}$（$i = 1, 2$）の定義より、$\epsilon_{e_i} \circ \hat{\mu}_{b_i} = \mu_{e_i}$ である。よって μ の自然性から次の図式の外側の四角が可換である。

$$
\begin{tikzcd}
F(b_1) \arrow[r, "\hat{\mu}_{b_1}"] \arrow[d, "F(h)"'] & R(b_1) \arrow[r, equal] \arrow[d, "R(h)"] & R(p(e_1)) \arrow[r, "\epsilon_{e_1}"] \arrow[d, "R(p(\tilde{h}))"'] & L(e_1) \arrow[d, "L(\tilde{h})"] \\
F(b_2) \arrow[r, "\hat{\mu}_{b_2}"] & R(b_2) \arrow[r, equal] & R(p(e_2)) \arrow[r, "\epsilon_{e_2}"] & L(b_2)
\end{tikzcd}
$$

これは $\epsilon^{b_2} \circ \alpha = \epsilon^{b_2} \circ \beta$ を意味している。よって、自然変換 $\hat{\mu} : F \to R$ の存在が言えた。 □

ファイバー圏の一般論について述べる。$p : E \to B$ がファイバー圏であったとする。B 上の射 $f : b_1 \to b_2$ に対し、関手 $Lf^* : p^{-1}(b_2) \to p^{-1}(b_1)$ を次のように構成する。

まず、$p^{-1}(b_2)$ 上の各対象 e_2 に対し、ファイバー圏の定義より、f のデカルト持ち上げ $\tilde{f}_{e_2} : \cdot \to e_2$ が存在する。$\tilde{f}_{e_2}$ の始域を $Lf^*(e_2)$ とする。また、$p^{-1}(b_2)$ 上の任意の射 $h : e_2 \to e_2'$ に対し、$\tilde{f}_{e_2'} : Lf^*(e_2') \to e_2'$ がデカルト射であることから、$p(h') = id_{b_1}$ かつ $\tilde{f}_{e_2'} \circ h' = h \circ \tilde{f}_{e_2}$ を満たす $h' : Lf^*(e_2) \to Lf^*(e_2')$ が唯一つ存在する。これを $Lf^*(h) = h'$ と置く。

$$
\begin{tikzcd}
Lf^*(h) = h' & \in & Hom_E(Lf^*(e_2), Lf^*(e_2')) \arrow[r, "(\tilde{f}_{e_2'})_*"] \arrow[d, "p"'] & Hom_E(Lf^*(e_2), e_2') \arrow[d, "p"] & \ni & h \circ \tilde{f}_{e_2} \\
id & \in & Hom_B(b_1, b_1) \arrow[r, "f_*"] & Hom_B(b_1, b_2) & \ni & f
\end{tikzcd}
$$

一意性を使えば Lf^* は確かに関手を定めることがわかる。

ここで、Lf^* の構成はデカルト持ち上げ $\tilde{f}_{e_2}$ の選び方に依存している。しかし、これをどのように選んでも Lf^* はすべて自然同型になる。その意味で、Lf^* は f のみに依存して一意に定まる。さらに、次が成り立つ。

命題 8. B 上の射の列 $b_1 \xrightarrow{f} b_2 \xrightarrow{g} b_3$ に対し、$Lf^* \circ Lg^* \cong L(g \circ f)^*$ である。

次に、B 上の各対象 b に対し、埋め込み関手 $p^{-1}(b) \to E$ を ι_b で表す。B 上の各射 $f : b_1 \to b_2$ に対し、f のデカルト持ち上げ族 $\{\tilde{f}_{e_2}\}$ は、自然変換 $\theta_f : \iota_{b_1} \circ Lf^* \to \iota_{b_2}$ を定める。

$$
\begin{tikzcd}
p^{-1}(b_1) \arrow[rd, "\iota_{b_1}"] & \\
p^{-1}(b_2) \arrow[u, "Lf^*"] \arrow[r, "\iota_{b_2}"'] \arrow[ur, phantom, "\theta_f \Downarrow"] & E
\end{tikzcd}
$$

具体的には、$(\theta_f)_{e_2} = \tilde{f}_{e_2} : Lf^*(e_2) \to e_2$ で定める。自然性は Lf^* の定義より明らかである。

先ほどの補題を改良する。

定理 9. 関手による次の図式のうち、$p : E \to B$ がファイバー圏であったとする。

$$
\begin{tikzcd}
B & \\
E \arrow[u, "p"] \arrow[r, "L"'] & U
\end{tikzcd}
$$

さらに、任意の対象 $b \in Ob(B)$ に対して $p^{-1}(b) \to \{b\}$ に沿った $L|_{p^{-1}(b)}$ の右 Kan 拡張 R_b が存在したとする。(すなわち、$R_b \cong \varprojlim L|_{p^{-1}(b)}$ である。)

$$
\begin{tikzcd}
\{b\} \arrow[rd, "R_b"] & \\
p^{-1}(b) \arrow[u, "p"] \arrow[r, "L|_{p^{-1}(b)}"'] \arrow[ur, phantom, "\epsilon^b \Downarrow"] & U
\end{tikzcd}
$$

この時、p に沿った L の右 Kan 拡張 $\mathbb{R}_p L$ が存在し、$\mathbb{R}_p L(b) \cong R_b$ である。

証明. 関手 $\mathbb{R}_p L$ と自然変換 ϵ の組で、各 R_b と ϵ^b の拡張になっているものを構成すれば、補題より結果が従う。

まずは関手 $\mathbb{R}_p L$ を構成する。対象については $\mathbb{R}_p L(b) = R_b$ とすればよい。B 上の射 $f : b_1 \to b_2$ に対し、$\mathbb{R}_p L(f) : R_{b_1} \to R_{b_2}$ を次のように構成する。$p : E \to B$ がファイバー圏だから、関手 $Lf^* : p^{-1}(b_2) \to p^{-1}(b_1)$ が定まる。これにより、極限錐 $\sigma^{b_1} : R_{b_1} \to L|_{p^{-1}(b_1)}$ に対し、錐 $(Lf^*)^*(\epsilon^{b_1}) : R_{b_1} \to L|_{p^{-1}(b_1)} \circ Lf^*$ が定まる。また、自然変換 $L_*(\theta_f) : L|_{p^{-1}(b_1)} \circ Lf^* \to L|_{p^{-1}(b_2)}$ が存在するので、錐 $L_*(\theta_f) \circ (Lf^*)^*(\epsilon^{b_1})$ は射 $R_{b_1} \to R_{b_2}$ を導く。これを $\mathbb{R}_p L(f)$ と置く。

また、自然変換 $\epsilon : \mathbb{R}_pL \circ p \to L$ を、次のように構成する。E 上の任意の対象 e に対し、$\epsilon_e = \epsilon_e^{p(e)} : R_{p(e)} \to L(e)$ と置く。これが自然変換を定めることを示すため、E 上の任意の射 $\tilde{f} : e_1 \to e_2$ をとる。次の図式が可換であることを示せばよい。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_pL(p(e_1)) \arrow[r, "\epsilon_{e_1}"] \arrow[d, "\mathbb{R}_pL(p(\tilde{f}))"'] & L(e_1) \arrow[d, "L(\tilde{f})"] \\
\mathbb{R}_pL(p(e_2)) \arrow[r, "\epsilon_{e_2}"] & L(e_2)
\end{tikzcd}$$

ここで、$\tilde{f}$ はデカルト射であると仮定してよい。実際、ファイバー圏の定義より、$\tilde{f} = k \circ l$ なる分解で $k : e_1' \to e_2$ がデカルト射、$p(l) = id_{e_1}$ なるものが存在する。よって、次の図式が可換であることを示せばよいが、このうち上の四角の可換性は $\epsilon^{p(e_1)}$ の自然性から従う。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_pL(p(e_1)) \arrow[r, "\epsilon_{e_1}"] \arrow[d, equal] & L(e_1) \arrow[d, "L(l)"] \\
\mathbb{R}_pL(p(e_1')) \arrow[r, "\epsilon_{e_1'}"] \arrow[d, "\mathbb{R}_pL(p(k))"'] & L(e_1) \arrow[d, "L(k)"] \\
\mathbb{R}_pL(p(e_2)) \arrow[r, "\epsilon_{e_2}"] & L(e_2)
\end{tikzcd}$$

以下、$\tilde{f}$ はデカルト射であると仮定する。$f = p(\tilde{f}) : b_1 \to b_2$ と置く。この時、$\tilde{f}$ は f のデカルト持ち上げであるので、$Lf^*(h)$ の定義に用いたデカルト持ち上げの族 $\{\tilde{f}_e\}$ のうち、$\tilde{f}_{e_2} = \tilde{f}$ としてよい。

今、$\mathbb{R}_pL(f)$ は錐 $\sigma = L_*(\theta_f) \circ (Lf^*)^*(\epsilon^{b_1}) : R_{b_1} \to L|_{p^{-1}(b_1)} \circ Lf^* \to L|_{p^{-1}(b_2)}$ によって導かれる射であった。特に、対象 e_2 の上では $L_*(\theta_f)_{e_2} = L(\tilde{f}_{e_2}) = L(\tilde{f})$, $(Lf^*)^*(\epsilon^{b_1})_{e_2} = \epsilon_{e_1}^{b_1}$ である。すなわち、次の図式が可換である。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_pL(p(e_1)) \arrow[r, "\epsilon_{e_1}"] \arrow[d, "\mathbb{R}_pL(p(\tilde{f}))"'] \arrow[dr, "\sigma_{e_2}"] & L(e_1) \arrow[d, "L(\tilde{f})"] \\
\mathbb{R}_pL(p(e_2)) \arrow[r, "\epsilon_{e_2}"] & L(e_2)
\end{tikzcd}$$

以上により、自然変換 $\epsilon : \mathbb{R}_pL \circ p \to L$ が構成された。

ここで構成した関手 $\mathbb{R}_pL$ および自然変換 ϵ は、構成より明らかに各 R_b と ϵ^b の拡張になっている。 $\square$

3 主定理の証明

証明. 次の図式を考える。ただし、$\hat{K} : I \to (C \downarrow K)$ は $c \mapsto (K(c), id, K(c))$ で定める。

$$
\begin{tikzcd}
\{c\} \arrow[r, hook] & C \arrow[rdd, dotted, bend left, "\mathbb{R}_{pr_1}(L\circ pr_2)\cong\mathbb{R}_K L"] & \\
(c\downarrow K) \arrow[u] \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & (C\downarrow K) \arrow[u, "pr_1"'] \arrow[d, shift left, "pr_2"] \arrow[rd, "L\circ pr_2"] & \\
(c\downarrow K) \arrow[r, "pr_2"] \arrow[rr, bend right, "L_c"'] & I \arrow[u, shift left, "\hat{K}"] \arrow[r, "L"'] & D
\end{tikzcd}
$$

$pr_2 \dashv \hat{K}$ だから、命題 3 より、$L \circ pr_2$ は L の $\hat{K}$ に沿った右 Kan 拡張である。また、仮定より定理 9 が使えるので、$L \circ pr_2$ の pr_1 に沿った右 Kan 拡張 $\mathbb{R}_{pr_1}(L \circ pr_2)$ が存在し、自然に $\mathbb{R}_{pr_1}(L \circ pr_2)(c) \cong \varprojlim L_c$ である。右 Kan 拡張の合成は右 Kan 拡張なので、$\mathbb{R}_{pr_1}(L \circ pr_2)$ は L の $K = pr_1 \circ \hat{K}$ に沿った右 Kan 拡張である。 □

参考文献

[1] nlab. https://ncatlab.org.

[2] @alg_d. 壱大整域. http://alg-d.com.

[3] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5. Springer Science & Business Media, 2013.

[4] マックレーン S. **圏論の基礎**. シュプリンガーフェアラーク東京, 2005.