葉層のホロノミー

山崎 晃司

平成 30 年 7 月 29 日

記号一覧

$\mathbb{R}$: 実数全体の集合, I : 閉区間
$\mathbb{R}_{>0}$: 正の実数全体の集合, $\mathbb{Z}_{>0}$: 正の整数全体の集合
$M, N, S, T, \cdots$: 多様体
$f, g, \cdots$: (滑らかな) 写像
$\pi_M : TM \to M$: M の接ベクトル束
$\pi_1(M)$: M の基本亜群
L, L_α : 葉
$\mathcal{F} = \{L_\alpha\}_{\alpha \in A}$: 葉層構造
$dim(\mathcal{F})$: $\mathcal{F}$ の次元, $codim(\mathcal{F})$: $\mathcal{F}$ の余次元
$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \{L_\alpha | \alpha \in A\}$: 葉空間
$\pi : M \to \mathcal{L}$: 商写像
$gSub_L$: 次のような圏 (ただし、$L \in \mathcal{L}$)
　対象 $([N], x)$: $[N]$ は L と点 x で横断的に交わる $codim(\mathcal{F})$ 次元部分多様体 N の芽
　射 $[f] : ([N_1], x) \to ([N_2], y)$: $f(x) = y$ なる滑らかな写像 $f : N_1 \to N_2$の芽
$hol_{\bar{S}} : \pi_1(L) \to gSub_L$: ホロノミー表現
$H_{\bar{S}} \stackrel{\text{def}}{=} Im(hol_{\bar{S}})$: ホロノミー亜群

1 葉層の基本と導入

定義 1. n 次元多様体 M 上の次元 k の (または余次元 $n-k$ の) 葉層構造とは、単射ではめ込まれた k 次元連結部分多様体からなる集合 $\mathcal{F} = \{L_\alpha \subset M\}_{\alpha \in A}$ であって次を満たすものである。

(i) $M = \coprod_{\alpha \in A} L_\alpha$

(ii) $^\forall p \in M$ に対して p 周りの座標近傍 $^\exists(U, \phi)$ で次を満たすものが存在する。

$U \cap L_\alpha \neq \emptyset$ なる各 $\alpha \in A$ と $U \cap L_\alpha$ の各連結成分 Q に対し $^{\exists!}c \in \mathbb{R}^{n-k}$ $s.t.$ $Q = \phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{c\})$

このとき、各 L_α を $\mathcal{F}$ の葉という。また、$\mathcal{F}$ に商位相を入れたものを葉空間ともいう。

(ii) のような座標近傍を葉層座標近傍と呼び、Q を切片と呼ぶ。

注意 2. 各葉 L_α の包含写像 $L_\alpha \subset M$ は単射はめ込みであるが、埋め込みである必要はない。すなわち、L_α 上の多様体としての位相は M から導かれる相対位相と一致するとは限らない。

定義 3. n 次元多様体 M 上の次元 k の (または余次元 $n-k$ の) 分布とは、接束の階数 k の部分束 $\mathcal{D} \subset TM$ のことである。

$\mathcal{D}$ が積分可能であるとは、$\mathcal{D}$ に接する次元 k の葉層構造が存在することである。

積分可能な分布と葉層構造はしばしば同一視して同じ記号で表す。Frobenius の定理は基本である。

事実 4 (Frobenius)**.** 次元 k の分布 $\mathcal{D}$ について、次は同値である。

(i) $\mathcal{D}$ は積分可能である。

(ii) 局所的に $\mathcal{D}$ を張る任意の一時独立なベクトル場 $^\forall X_1, \cdots, ^\forall X_k$ に対し、$[X_i, X_j] \in \mathcal{D}(^\forall i, j)$ を満たす。

(iii) 局所的に $\mathcal{D}$ を張る一時独立なベクトル場 $^\exists X_1, \cdots, ^\exists X_k$ であって、$[X_i, X_j] \in \mathcal{D}(^\forall i, j)$ を満たすものが存在する。

(iv) 局所的に $\mathcal{D} = \bigcap_{i=1}^{n-k} Ker(\omega_i)$ と表せる任意の一時独立な微分形式 $\omega_1, \cdots, \omega_{n-k}$ に対し、$(n-k)^2$ 個の微分形式 $^\exists\eta_{ij}$ $s.t.$ $\omega_i = \sum_{j=1}^{n-k} \eta_{ij} \wedge \omega_j$ が存在する。

(v) 局所的に $\mathcal{D} = \bigcap_{i=1}^{n-k} Ker(\omega_i)$ と表せる一時独立な微分形式 $^\exists\omega_1, \cdots, ^\exists\omega_{n-k}$ および $(n-k)^2$ 個の微分形式 $^\exists\eta_{ij}$ $s.t.$ $\omega_i = \sum_{j=1}^{n-k} \eta_{ij} \wedge \omega_j$ が存在する。

葉層座標近傍について、次の性質が成り立つ。

命題 5. (U, ϕ) を葉層座標近傍、$V \subset U$ を開集合、$K \subset V$ をコンパクト集合とする。K が (U, ϕ) のただ一つの切片に含まれるとき、K を含む開集合 $^\exists W \subset V$ であって、$(W, \phi|_W)$ が葉層座標近傍となるものが存在する。さらに、開円盤 $^\exists V_1 \subset \mathbb{R}^k$ および開集合 $^\exists V_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$ を用いて $\phi(W) = V_1 \times V_2$ と表せる。

証明. まず、K は一つの切片に属するので、$^{\exists!}c \in \mathbb{R}^{n-k}\, s.t.\, K \subset \phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{c\})$ である。$\phi(K) \subset \phi(V) \subset \mathbb{R}^n$ はコンパクトだから、$\delta \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}d(\phi(V), \mathbb{R}^n - \phi(V)) > 0$ である。(ただし、d は通常のユークリッド距離とする。) そこで、$V_1 \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^k | d(x, c) < \delta\}, V_2 \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^{n-k} | d(x, \phi(V)) < \delta\}, W \overset{\text{def}}{=} \phi^{-1}(V_1 \times V_2)$ とすればよい。 □

これからやることは、葉層構造のホロノミーを定義することである。

M を多様体、$\mathcal{F} = \{L_\alpha \subset M\}_{\alpha \in A}$ を M 上の葉層構造、$\mathcal{L}$ を $\mathcal{F}$ の葉空間 (集合としては $\mathcal{L} = \mathcal{F}$) とする。一つの葉 $L \in \mathcal{L}$ に対して、$gSub_L$[1] を次のような圏として定義する。

- 対象 $([N], x)$: $[N]$ は L と点 x で横断的に交わる $codim(\mathcal{F})$ 次元部分多様体 N の芽
- 射 $[f] : ([N_1], x) \to ([N_2], y)$: $f(x) = y$ なる滑らかな写像 $f : N_1 \to N_2$ の芽

ホロノミー表現は、ある方法で定義される、葉 L の基本亜群 $\pi_1(L)$ から $gSub_L$ へ伸びる関手である。これを定義するため、L 上の各道に対して $gSub_L$ の射を対応させたい。

2 ホロノミー

ホロノミー表現を一般的に定義する前に、予備的な定義を述べる。

定義 6. 葉 $L \in \mathcal{L}$ と $([S], x), ([T], y) \in Ob(gSub_L)$ を固定する。x と y を結ぶ L 上の道 $\gamma : I \to L$ に対し、$Im(\gamma) \subset U$ なる葉層座標近傍 (U, ϕ) が存在するとき、$hol_{([S],x),([T],y)}(\gamma) : ([S], x) \to ([T], y)$ を次のように定義する。

$k \overset{\text{def}}{=} codim(\mathcal{F})$ とし、$pr_1 : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ を射影とする。$S \in [S], T \in [T]$ を十分小さくとると、$h_S \overset{\text{def}}{=} pr_1 \circ \phi|_S : S \to \mathbb{R}^k, h_T \overset{\text{def}}{=} pr_1 \circ \phi|_T : T \to \mathbb{R}^k$ は埋め込みとしてよい。さらに S を小さく取り直すことにより、$f_{S,T} \overset{\text{def}}{=} h_T^{-1} \circ h_S : S \to T$ が定まる。そこで、$hol_{([S],x),([T],y)}(\gamma)$ を $f_{S,T}$ の芽として定義する。

補題 7.

(i) $hol_{([S],x),([T],y)}(\gamma) : ([S], x) \to ([T], y)$ は $([S], x)$ と $([T], y)$ のみに依存する。

(i.e. 葉層座標近傍 (U, ϕ) のとりかたに依存しない。*)*

(ii) $hol_{([S_2],x_2),([S_3],x_3)}(\gamma_2) \circ hol_{([S_1],x_1),([S_2],x_2)}(\gamma_1) = hol_{([S_1],x_1),([S_3],x_3)}(\gamma_1 \cdot \gamma_2)$

(iii) γ_0 と γ_1 は端点を固定する L 上のホモトピー $\{\gamma_t\}_{t \in [0,1]}$ によってホモトピックであったとする。すべての $Im(\gamma_t)$ を含む葉層座標近傍が存在したとき、$hol_{([S],x),([T],y)}(\gamma_0) = hol_{([S],x),([T],y)}(\gamma_1)$

証明.

(i) $Im(\gamma) \subset U, U'$ なる葉層座標近傍 $(U, \phi), (U', \phi')$ が存在したとする。ここで、命題 5 より、$Im(\gamma) \subset V \subset U \cap U'$ なる開集合 V で、(V, ϕ) が葉層座標近傍になるようにとれる。

[1] 記号は何でもよいのだが、部分多様体 (Submanifolds) の芽 (germs) の圏という意味でこの記号を用いた。

このとき、次の図式を可換にする滑らかな写像 ι がただ一つ存在する。

$$\begin{tikzcd} \phi(V) \arrow[r, "\phi' \circ \phi^{-1}"] \arrow[d, "pr_1"] & \phi'(U') \arrow[d, "pr_1"] \\ pr_2(\phi(V)) \arrow[r, "\iota"] & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

実際、各 $c \in pr_2(\phi(V))$ に対応する切片 $Q \subset (V, \phi)$ がただ一つ定まり、切片 Q の連結性から $Q \subset Q'$ なる切片 $Q' \subset (U', \phi')$ がただ一つ定まる。これに対応する定数 $c' \in \mathbb{R}^k$ が $\iota(c)$ であるので、ι は well-defined である。

そこで、次の写像の芽による可換図式を考えれば、ホロノミーが葉層座標近傍によらないことがわかる。

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "h_S"] \arrow[dr, "h'_S"'] & \mathbb{R}^k \arrow[d, "\iota"] \arrow[dr, "h_T^{-1}"] & \\ & \mathbb{R}^k \arrow[r, "{h'}_T^{-1}"'] & T \end{tikzcd}$$

(ii) , (iii) 明らか。 □

いよいよ一般的な場合の定義を述べる。

定義 8. 葉 $L \in \mathcal{L}$ と $([S], x), ([T], y) \in Ob(gSub_L)$ を固定する。x と y を結ぶ L 上の道 $\gamma : I \to L$ に対し、$hol_{([S],x),([T],y)}(\gamma) : ([S], x) \to ([T], y)$ を次のように定義する。

十分細かい I の分割 $\{t_0 < t_1 < \cdots < t_l\}$ および葉層座標近傍族 $\{(U_i, \phi_i)\}_{1 \le i \le l}$ をとって、$I_i \stackrel{\text{def}}{=} [t_{i-1}, t_i], \gamma_i \stackrel{\text{def}}{=} \gamma|_{I_i}$ とおき、$Im(\gamma_i) \subset U_i$ を満たすものをとる。さらに、$x_i \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(t_i)$ (とくに $x = x_0, y = x_l$) とし、$([S_i], x_i) \in Ob(gSub_L)$ ($1 \le i \le l-1$.ただし、$([S_0], x_0) \stackrel{\text{def}}{=} ([S], x), ([S_l], x_l) \stackrel{\text{def}}{=} ([T], y)$) をとる。そこで、

$$hol(\gamma) = hol_{([S],x),([T],y)}(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} hol_{([S_{l-1}],x_{l-1}),([S_l],x_l)}(\gamma_l) \circ \cdots \circ hol_{([S_0],x_0),([S_1],x_1)}(\gamma_1)$$

とする。

補題 9.

(i) $hol_{([S],x),([T],y)}(\gamma) : ([S], x) \to ([T], y)$ は $([S], x)$ と $([T], y)$ のみに依存する。

(i.e. I の分割 $\{t_0 < t_1 < \cdots < t_l\}$、葉層座標近傍族 $\{(U_i, \phi_i)\}_{1 \le i \le l}$ および中継する多様体の芽 $([S_i], x_i)$ $(1 \le i \le l-1)$ のとりかたに依存しない。*)*

(ii) $hol_{([S_2],x_2),([S_3],x_3)}(\gamma_2) \circ hol_{([S_1],x_1),([S_2],x_2)}(\gamma_1) = hol_{([S_1],x_1),([S_3],x_3)}(\gamma_1 \cdot \gamma_2)$

(iii) γ_0 と γ_1 は端点を固定する L 上のホモトピー $\{\gamma_t\}_{t \in [0,1]}$ によってホモトピックであったとする。このとき、$hol_{([S],x),([T],y)}(\gamma_0) = hol_{([S],x),([T],y)}(\gamma_1)$

証明. (i) I の分割が二つ与えられたとき、その共通細分をとることができる。あとは補題 7 の (i),(ii) より明らか。
(ii) も明らか。

(iii) I^2 の分割 $\{t_0 < t_1 < \cdots < t_l\}, \{s_0 < s_1 < \cdots < s_m\}$ および葉層座標近傍族 $\{(U_{ij}, \phi_{ij})\}_{1 \le i \le l, 1 \le j \le m}$ をとって $\gamma_t([s_{j-1}, s_j]) \subset U_{ij}(^\forall t \in [t_{i-1}, t_i])$ を満たすようにする。あとは補題 7 の (iii) より明らか。 □

定義 10. 写像 $\bar{S} : L \to Ob(gSub_L)$ であって、$\bar{S}(x) = ([S_x], x)$ と表せるものを固定する。$\bar{S}$ に関するホロノミー表現とは次のように定義される関手 $hol = hol_{\bar{S}} : \pi_1(L) \to gSub_L$ である。

$$hol_{\bar{S}}([\gamma]) \overset{\mathrm{def}}{=} hol_{\bar{S}(x),\bar{S}(y)}(\gamma)\ (\text{ただし、}x, y\text{ は}\gamma\text{の端点。})$$

また、$H_{\bar{S}} \overset{\mathrm{def}}{=} Im(hol_{\bar{S}})$ をホロノミー亜群という。さらに $H_{\bar{S}}$ の対象を $\bar{S}(x)$ に制限した充満部分圏は群になるが、これをホロノミー群といい、$H_{\bar{S}(x)}$ と書く。

注意 11. $H_{\bar{S}(x)}$ は $\bar{S}(x)$ のみに依存し、x 以外の点における $\bar{S}$ の値に依存しない。

命題 12. 二つの写像 $\bar{S}, \bar{T} : L \to Ob(gSub_L)$ について、$\bar{S}(x) = ([S_x], x), \bar{T}(x) = ([T_x], x)$ と表せるとする。このとき、二つの関手 $hol_{\bar{S}}, hol_{\bar{T}} : \pi_1(L) \to gSub_L$ は自然同型である。

証明. 各 $x \in L$ に対して x にとどまり続ける道を γ_x と表し、$\tau_x \overset{\mathrm{def}}{=} hol_{\bar{S}(x),\bar{T}(x)}(\gamma_x) : \bar{S}(x) \to \bar{T}(x)$ とする。$x \mapsto \tau_x$ が自然同型であることは補題 9 より明らか。 □

3 応用

命題 13. $p : E \to M$ をファイバー束とし、$\mathcal{F}$ を E 上の $k = dim(M)$ 次元葉層構造で、すべての葉がファイバーに横断的に交わるとする。$^\forall x \in M, ^\forall e \in p^{-1}(x)$ に対し、x まわりの座標近傍 (U, ϕ) および e まわりの葉層座標近傍 $(\hat{U}, \hat{\phi})$ で、次を満たすものが存在する。

$n = dim(E)$ とする。開集合 $V \subset \mathbb{R}^{n-k}$ を用いて $\hat{\phi}(\hat{U}) = \phi(U) \times V$ と表せ、次の図式が可換である。

$$\begin{array}{ccc} \hat{U} & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \phi(U) \times V \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle pr_1} \\ U & \xrightarrow[\phi]{} & \phi(U) \end{array}$$

証明. e まわりの葉層座標近傍 $(\hat{W}, \hat{\psi})$ をとる。$f \overset{\mathrm{def}}{=} p \times (pr_2 \circ \hat{\psi}) : \hat{W} \to M \times \mathbb{R}^{n-k}$ は E 上で微分が非退化だから、e まわりの開集合 $\hat{W}' \subset \hat{W}$ および x まわりの座標近傍 (W, ψ) をとって、$f|_{\hat{W}'} : \hat{W}' \to W \times \mathbb{R}^{n-k}$ は開埋め込みとしてよい。ここで、$p|_{\hat{W}'} : \hat{W}' \to W$ は全射としてよい。$U \subset W$ を x まわりの開円盤として、$\phi \overset{\mathrm{def}}{=} \psi|_U$ とする。このとき、$\hat{U} \overset{\mathrm{def}}{=} f^{-1}(U \times \mathbb{R}^{n-k}), \hat{\phi} \overset{\mathrm{def}}{=} (\phi \times id) \circ f|_{\hat{U}}$ とすれば $(\hat{U}, \hat{\phi})$ は e まわりの葉層座標近傍であり、条件を満たす。 □

次の命題[2] を証明なしに認める。

命題 14. 葉空間へ延びる商写像 $\pi : M \to \mathcal{L}$ は開写像である。

[2] [3] の定理 4.10

ホロノミー表現を用いて、定理１６が証明できるが、その前に補題を一つ準備しておく。

補題 15. 　$\mathcal{G}$ を次のような有限亜群 (対象と射がともに有限個) とする。

- 各対象 $([M], x)$ は多様体 M の点 $x \in M$ における芽 $[M]$ と xの組。
- 各射 $[f] : ([M], x) \to ([N], y)$ は $f(x) = y$ なる微分同相写像 $f : M \to N$ の x における芽。

さらに、$\mathcal{G}$ の各射 $\sigma \in Arr(\mathcal{G})$ に対して、代表元 $f_\sigma : (M_\sigma, x_\sigma) \to (N_\sigma, y_\sigma)$ が与えられていたとする。すなわち、$\sigma = [f_\sigma] : ([M_\sigma], x_\sigma) \to ([N_\sigma], y_\sigma)$ を満たす。

このとき、各対象 $O \in Ob(\mathcal{G})$ から代表元 (M_O, x_O) への対応であって、次を満たすものが存在する。

(i) $\mathcal{G}$ の任意の射 $^\forall\sigma : O \to P$ に対し、$(M_O, x_O) \subset (M_\sigma, x_\sigma), (M_P, x_P) \subset (N_\sigma, y_\sigma). f_\sigma(M_O) = M_P$

(ii) $\mathcal{G}$ の射 $\sigma_1 : O_1 \to O_2, \sigma_2 : O_2 \to O_3$ に対し、$f_{\sigma_2 \circ \sigma_1}|_{M_{O_1}} = f_{\sigma_2} \circ (f_{\sigma_1}|_{M_{O_1}})$

証明. $\mathcal{G}$ の各射 $\sigma : O \to P$ に対し、$M'_\sigma \subset \displaystyle\bigcap_{\sigma_1 : P \to P'} M_{\sigma_1 \circ \sigma} \cap f_\sigma^{-1}(N_\sigma \cap M_{\sigma_1})$ かつ $f_{\sigma_1 \circ \sigma}|_{M'_\sigma} = f_{\sigma_1} \circ (f_\sigma|_{M'_\sigma})$ なる $M'_\sigma \in O$ をとり、$N'_\sigma \overset{\text{def}}{=} f_\sigma(M'_\sigma)$ とする。とくに $\sigma = id_O$ のとき、$f_{id_O}|_{M'_{id_O}} = f_{id_O} \circ (f_{id_O}|_{M'_{id_O}})$ より $f_{id_O}|_{M'_{id_O}} = id_{M'_{id_O}}$ である。
$\mathcal{G}$ の各対象 O に対して、$M'_O \subset \displaystyle\bigcap_{\sigma_1 : P_1 \to O, \sigma_2 : O \to P_2} (N_{\sigma_1} \cap M_{\sigma_2})$ なる $M'_O \in O$ をとる。このとき、$\sigma : O \to P$ に対し、$id_{M'_O} = f_{id_O}|_{M'_O} = f_{\sigma^{-1}} \circ (f_\sigma|_{M'_O}), id_{M'_P} = f_{id_P}|_{M'_P} = f_\sigma \circ (f_{\sigma^{-1}}|_{M'_P})$ を満たす。$M_O \overset{\text{def}}{=} \displaystyle\bigcap_{\sigma_1 : P_1 \to O, \sigma_2 : O \to P_2} (f_{\sigma_1}(M'_{P_1}) \cap f_{\sigma_2}^{-1}(M'_{P_2}))$ とする。これは条件を満たす。 □

定理 16. 多様体 M 上の葉層構造 $\mathcal{F}$ および一つの葉 $L \in \mathcal{L}$ について、L がコンパクトかつホロノミー亜群が局所有限 *(*二つの任意の対象に対して、その間の射が有限個*)* と仮定する。このとき、$^\forall([S], x) \in Ob(gSub_L)$ および M 上の任意の開集合 $^\forall V \subset M$ であって L を含むものに対して、次を満たす $\mathcal{L}$ 上の L まわりの開集合 $^\exists\tilde{U} \subset \mathcal{L}$ が存在する。

(i) $\pi^{-1}(\tilde{U}) \subset V$

(ii) $^\exists S \in [S], ^\exists G \subset Aut(S, x)$: 部分群 $s.t. S \subset \pi^{-1}(\tilde{U}), G \to H_{([S],x)}; f \mapsto [f]$ は同型

(iii) $S/G \cong \tilde{U}; [y] \mapsto \pi(y)$

証明. $E \subset V$ を L の管状近傍とし、$p : E \to L$ を標準的な射影とする。すなわち、$p : E \to L$ はベクトル束の構造を持つ。M 上のリーマン計量を固定すれば $p : E \to L$ は法束と測地線写像を通して (0 切断の近傍では) 同型としてよい。そこで、$S \in [S]$ が全測地的であるようなリーマン計量をとれば、S は $p : E \to L$ の x 上のファイバーとみなしてよい。さらに E を小さく取り直して、各ファイバーはすべての葉と横断的に交わると仮定してよい。

命題１３と L がコンパクトであることから、E に含まれる有限個の葉層座標近傍による L の被覆 $\{(\hat{U}_i, \hat{\phi}_i)\}_i$ と、同じ添え字を持つ L の座標近傍系 $\{(U_i, \phi_i)\}$ で、次を満たすものがとれる。

- 各 i に対して、開集合 $\Omega_i \subset \mathbb{R}^{n-k}$ を用いて $\hat{\phi}_i(\hat{U}_i) = \phi_i(U_i) \times \Omega_i$ と表せ、次の図式が可換である。

$$\begin{CD} \hat{U}_i @>{\hat{\phi}_i}>> \phi_i(U_i) \times \Omega_i \\ @V{p}VV @VV{pr_1}V \\ U_i @>>{\phi_i}> \phi_i(U_i) \end{CD}$$

さらに、L 上にリーマン計量を固定して各 U_i を凸円盤としてとれば、任意の i, j に対して $U_{ij} \overset{\text{def}}{=} U_i \cap U_j$ は空集合でなければ開円盤としてよい。後のため、$\phi_{ij} \overset{\text{def}}{=} \phi_j \circ (\phi_i|_{U_{ij}})^{-1}, \hat{U}_{ij} \overset{\text{def}}{=} \hat{U}_i \cap \hat{U}_j, \hat{\phi}_{ij} \overset{\text{def}}{=} \hat{\phi}_j \circ (\hat{\phi}_i|_{\hat{U}_{ij}})^{-1}$ と定義しておく。

固定しておいた ${}^\forall([S], x) \in Ob(gSub_L)$ について、添え字 i の順番を入れ替えて $x = x_0 \in U_0$ としてよい。さらに各 i に対して $x_i \in U_i$ を一つとり、$S_i \overset{\text{def}}{=} p^{-1}(x_i) \cap \hat{U}_i$ とする。

$\mathcal{I} \overset{\text{def}}{=} \{ij = (i,j)\,|i \neq j, U_{ij} \neq \emptyset\}$ として添え字の集合を用意する。各 $k \in \mathcal{I}$ に対し、$k = (i(k), j(k)), \bar{k} \overset{\text{def}}{=} (j(k), i(k))$ と表す。
${}^\forall k \in \mathcal{I}$ に対し、開集合 ${}^\exists\Omega_k \subset \mathbb{R}^{n-k}$ を用いて $\hat{\phi_{i(k)}}(\hat{U}_k) = \phi_{i(k)}(U_k) \times \Omega_k$ と表せる。さらに各 $k \in \mathcal{I}$ に対し、$S_k^1 \overset{\text{def}}{=} S_{i(k)} \cap \hat{\phi}_{i(k)}^{-1}(\phi_{i(k)}(U_{i(k)}) \times \Omega_k), S_k^2 \overset{\text{def}}{=} S_{j(k)} \cap \hat{\phi}_{j(k)}^{-1}(\phi_{j(k)}(U_{j(k)}) \times \Omega_k)$ として、次の写像の合成を $g_k : S_k^1 \to S_k^2$ とする。

$$S_k^1 \xrightarrow{\hat{\phi}_{i(k)}} \{x_{i(k)}\} \times \Omega_k \xrightarrow{\cong} \{x_{j(k)}\} \times \Omega_k \xrightarrow{\hat{\phi}_{i(k)}^{-1}} S_k^2$$

ホロノミー亜群の充満部分亜群で、対象を $\{([S_i], x_i)\,|i\}$ に制限したものを $\mathcal{G}$ と書く。このとき、各 U_i を凸円盤としたことから、各 $\sigma \in \mathcal{G}$ は g_k の芽の合成として表せる。そこで、各 $\sigma \in \mathcal{G}$ の代表元 $h_\sigma : (S_\sigma, x_\sigma) \to (T_\sigma, y_\sigma)$ を、$g_k \in \sigma$ ならば $h_\sigma = g_k$ を満たすように選ぶ。補題１５より、$([S_i], x_i)$ の代表元 $(\tilde{S}_i, x_i)$ であって、次を満たすものが存在する。

$\mathcal{G}$ の任意の射 ${}^\forall\sigma : ([S_i], x_i) \to ([S_j], x_j)$ に対し、$(\tilde{S}_i, x_i) \subset (S_\sigma, x_\sigma), (\tilde{S}_j, x_j) \subset (T_\sigma, y_\sigma). h_\sigma(\tilde{S}_i) = \tilde{S}_j$

$\mathcal{G}$ の射 $\sigma_1 : ([S_{i_1}], x_{i_1}) \to ([S_{i_2}], x_{i_2}), \sigma_2 : ([S_{i_2}], x_{i_2}) \to ([S_{i_3}], x_{i_3})$ に対し、$h_{\sigma_2 \circ \sigma_1}|_{\tilde{S}_{i_1}} = h_{\sigma_2} \circ (h_{\sigma_1}|_{\tilde{S}_{i_1}})$

$\hat{\phi}_i(\tilde{S}_i) = \{\phi_i(x_i)\} \times \tilde{\Omega}_i$ と表し、$\hat{V}_i \overset{\text{def}}{=} \hat{\phi}_i^{-1}(\phi_i(U_i) \times \tilde{\Omega}_i)$ とする。また、$\mathcal{G}$ の各射 $\sigma : ([S_i], x_i) \to ([S_j], x_j)$ に対して $f_\sigma \overset{\text{def}}{=} h_\sigma|_{\tilde{S}_i}$ とする。そこで、$\{\tilde{S}_i\,|i\}$ を対象、$\{f_\sigma\,|\sigma\}$ を射とする亜群 $\tilde{\mathcal{G}}$ が定まり、$\tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}; f \mapsto [f]$ は同型である。$S \overset{\text{def}}{=} \tilde{S}_0$ として、$\tilde{\mathcal{G}}$ の対象 S における自己同型群を G とすれば、G は $Aut(S, x)$ の部分群であり、$G \to H_{([S],x)}; f \mapsto [f]$ は同型である。

$\tilde{U} \overset{\text{def}}{=} \pi(S) = \pi(\hat{V}_0)$ とすると、命題１４よりこれは開集合である。これが (i),(ii),(iii) の条件を満たすことを確認する。
(i)

${}^\forall z \in \pi^{-1}(\tilde{U})$ をとる。このとき、$L' \overset{\text{def}}{=} \pi(z)$ とすれば、これは $z \in L', L' \cap S \neq \emptyset$ を満たす葉である。$w \in L' \cap S$ を一つとると、L' は弧状連結だから、w と z を結ぶ L' 上の道 $\gamma' : I \to L'$ がとれる。$I' \overset{\text{def}}{=} \{t \in I\,|{}^\exists i\, s.t.\, \gamma'(t) \in \hat{V}_i\}$ とすると、I の連結性より $I' = I$ である。すなわち、${}^\exists i\, s.t.\, z \in \hat{V}_i \subset E \subset V$ である。

(ii) は既に示されている。
(iii)

$[y] \mapsto \pi(y)$ が全単射であればよい。全射であることと well-defined であることは明らか。単射性を示す。

$y, z \in S$ について、$\pi(y) = \pi(z)$ と仮定する。すなわち y と z は同じ葉 $L' \overset{\text{def}}{=} \pi(y)$ に属するので、y と z を結ぶ L' 上の道 $\gamma' : I \to L'$ がとれる。(i) と同様に、$Im(\gamma') \subset \bigcup_i \hat{V}_i \subset E$ である。$\gamma \overset{\text{def}}{=} p \circ \gamma' : I \to L$ とすると、これは x を基点とする L 上のループである。$\sigma \overset{\text{def}}{=} hol(\gamma)$ とすれば、$z = f_\sigma(y)$ □

系 17. 多様体 M 上の葉層構造 $\mathcal{F}$ について、すべての葉がコンパクトかつホロノミー亜群が自明と仮定する。このとき、商写像 $\pi : M \to \mathcal{L}$ が沈め込みとなるような、葉空間 $\mathcal{L}$ 上の多様体構造がただ一つ存在する。

定理 18. 定理１６のとき、さらに、$^\forall L' \in \tilde{U}$ は L を被覆して、
$Ker[hol : \pi_1(L, x) \to H_{([S],x)}] \subset \pi_1(L', x') \subset \pi(L, x)$ を満たす。

証明. 管状近傍の標準的な射影 $p : E \to L$ を L' に制限すれば、L' が各ファイバーに横断的に交わることから、これは被覆写像を定める。また、$^\forall[\gamma] \in Ker(hol)$ に対し、γ の L' への持ち上げを $\tilde{\gamma}$ とすれば、$\tilde{\gamma}(1) = hol(\gamma)(\tilde{\gamma}(0)) = \tilde{\gamma}(0)$ である。よって $[\tilde{\gamma}] \in \pi_1(L', x')$ である。 □

系 19. 多様体 M 上の葉層構造 $\mathcal{F}$ について、すべての葉がコンパクトかつホロノミー亜群が局所有限と仮定する。このとき、商写像 $\pi : M \to \mathcal{L}$ が *orbifold* 束を定めるような、葉空間 $\mathcal{L}$ 上の *orbifold* 構造がただ一つ存在する。

参考文献

[1] M. W. ハーシュ [著] and 松本堯生 [訳], "微分トポロジー," シュプリンガー数学クラシックス 第 25 巻

[2] 松島与三, "多様体入門," 裳華房　数学選書 5

[3] 田村一郎, "葉層のトポロジー," 岩波書店　数学選書