亜群とホモトピー

山崎 晃司　東京工業大学

2020 年 7 月 15 日

記号一覧

Set:集合と写像の圏
Top:位相空間と連続写像の圏
$\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, s, t)$:(小さい) 圏に対し、
　$\mathcal{C}_0 = Ob(\mathcal{C})$:対象の集合
　$\mathcal{C}_1 = Mor(\mathcal{C})$:射の集合
　s:始域写像
　t:終域写像

目 次

0　導入

亜群の幾何学的実現を中心に。私が勝手に用意した一般的ではない用語の右上には † を添えています。

1　亜群と位相亜群

1.1　基本的な定義

位相亜群の定義を述べよう。

まず、亜群とは、圏であってすべての射が同型射となるもののことであった。すなわち、亜群 $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, s, t, i, inv, comp)$ は次のデータからなる。

- 対象集合 $\mathcal{G}_0 \ni x, y, \cdots$
- 射集合 $\mathcal{G}_1 \ni f, g, \cdots$
- 始域写像 $s : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_0; (f : x \to y) \mapsto x$
- 終域写像 $t : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_0; (f : x \to y) \mapsto y$
- 恒等射写像 $i : \mathcal{G}_0 \to \mathcal{G}_1; x \mapsto id_x$
- 逆射写像 $inv : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_1; f \mapsto f^{-1}$
- 合成演算 $comp : \mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}_1; (f, g) \mapsto f \circ g$

ここで、$comp$ の定義域 $\mathcal{G}_2$ は射の合成可能対の集合である。右下の添え字は $\mathcal{G}$ のナーヴの添え字と対応している。

位相亜群とは、位相空間の圏の亜群対象のことである。

定義 1.1 (位相亜群)**.** $\mathcal{G}$ が位相亜群 *(topological groupoid)* であるとは、対象集合 $\mathcal{G}_0$ および射集合 $\mathcal{G}_1$ が位相空間であって、五つの写像 s, t, i, inv, $comp$ が全て連続となることである。

$X = \mathcal{G}_0$ の時、位相亜群 $\mathcal{G}$ は X 上の位相亜群という。

同様に、“滑らかな多様体の圏の亜群対象” と呼ぶべき定義もあり、それは Lie 亜群 (Lie groupoid) と呼ばれている。ただし、これはテクニカルな事情から、始域写像 s および終域写像 t が沈めこみであることを仮定する。逆に位相亜群については、s や t が “沈めこみ” であることをうまく定義してやらなければ、豊かな一般論は展開しづらい。次の性質はかなり強いが、重要な性質である。

定義 1.2 (エタール)**.** 位相亜群 $\mathcal{G}$ がエタール *(étale)* であるとは、始域写像 s または終域写像 t が局所同相写像になることである。

注意 1.3. $\mathcal{G}$ がエタールであるとき、s, t, i, inv, $comp$ はすべて局所同相写像である。（inv は一般に同相写像である。）このことは、亜群が満たすべき公理を可換図式で表現すれば容易にわかる。

例 1.4 (位相空間). 任意の位相空間は、恒等射のみからなる亜群と見なすことで位相亜群となる。これはエタール位相亜群である。

例 1.5 (位相群). 任意の位相群は、対象がただ一つの亜群と見なすことで位相亜群となる。

次の例は、上記の自明な例を含む。

例 1.6 (群の作用). 位相空間 X に位相群 G が左から作用しているとする。$\mathcal{G}_0 = X$, $\mathcal{G}_1 = G \times X$, $s(g,x) = x$, $t(g,x) = g \cdot x$ とすることで位相亜群 $\mathcal{G}$ が定まる。$\mathcal{G}$ がエタールであることは、G が離散群であることと同値である。

1.1.1 作用に関する概念

位相亜群とは、位相群が作用する空間を一般化したものだと思える。そこで、群作用に関する一般的な概念を亜群に対して定義する。

定義 1.7. 位相亜群 $\mathcal{G}$ について、次の写像 Φ を考える。

$$\Phi = s \times t : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_0 \times \mathcal{G}_0; g \mapsto (s(g), t(g))$$

- $\mathcal{G}$ が自由であるとは、上記の写像 Φ が単射となることである。
- $\mathcal{G}$ が推移的であるとは、上記の写像 Φ が全射となることである。
- $\mathcal{G}$ が固有であるとは、上記の写像 Φ が固有 *(i.e.* コンパクト集合の逆像がコンパクト*)* であることである。

また、亜群が作用する空間を考えることもできる。

定義 1.8. X は位相空間、$\mathcal{G}$ は位相亜群とする。$\mathcal{G}$ の X に対する連続な右作用とは、二つの連続な写像 $\rho : X \to \mathcal{G}_0$, $\mu : X \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \to X$ であって、次を満たすものである。*(*ただし、$X \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \overset{\mathrm{def}}{=} \{(x,g) \mid \rho(x) = t(g)\}$ である。*)*

- $\rho(\mu(x,g)) = s(g)$
- $\mu(\mu(x,g),h) = \mu(x,gh)$
- $\mu(x,id) = x$

この時、$\mu(x,g) = x \cdot g$ と書く。ρ を作用の錨またはアンカー *(anchor)* と呼ぶ。

次の図式をイメージしてもらいたい。矢印の向きが逆（反変）であるが、これは右作用を考えているからであり、左作用を考えればもちろん向きは変わらない（共変）。

$$\begin{tikzcd}
x \in \rho^{-1}(\rho(x)) \arrow[r] \arrow[d, dotted, no head] & \rho^{-1}(\rho(y)) \ni y = x \cdot g \arrow[d, dotted, no head] \\
\rho(x) & \rho(y) \arrow[l, "g"']
\end{tikzcd}$$

命題 1.9 (亜群の作用)**.** 位相空間 X に位相亜群 $\mathcal{G}$ が作用しているとする。ここではわかりやすく、<u>**左から**</u>作用しているとする。$\mathcal{H}_0 = X$, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} X$, $s(g,x) = x$, $t(g,x) = g \cdot x$ とすることで位相亜群 $\mathcal{H}$ が定まる。位相亜群 $\mathcal{H}$ が自由（*resp.* 推移的、固有）であることは、$\mathcal{G}$ の X への作用が自由（*resp.* 推移的、固有）であることと同値である。この $\mathcal{H}$ を $\mathcal{G}_X$ と書く[†]。

位相空間 X に位相亜群 $\mathcal{G}$ が作用しているとする。この作用が自由・推移的・固有であることは、位相亜群 $\mathcal{G}_X$ が自由・推移的・固有であることと定義する。具体的には次のように表せる。

定義 1.10. $\mathcal{G}$ の X に対する連続な右作用について、次の写像 Φ を考える。

$$\Phi : X \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \to X \times X; (x,g) \mapsto (x, x \cdot g)$$

- 作用が自由 *(free)* であるとは、上記の写像 Φ が単射となることである。具体的には次の条件と同値である。
$$x \cdot g = x \Rightarrow g = 1$$
- 作用が推移的 *(transitive)* であるとは、上記の写像 Φ が全射となることである。具体的には、任意の $x, y \in X$ に対し、$x \cdot g = y$ なる g が存在することと同値である。
- $\mathcal{G}$ の X に対する連続な *(*右*)* 作用が固有 *(proper)* であるとは、上記の写像 Φ が固有 *(i.e.* コンパクト集合の逆像がコンパクト*)* であることである。

1.1.2 位相亜群の射

定義 1.11 (位相亜群の射)**.** $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ は位相亜群とする。射 $f : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ とは、二つの連続写像 $f_0 : \mathcal{G}_0 \to \mathcal{H}_0$ および $f_1 : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{H}_1$ の組であって、次の二つの図式を可換にするもののことである。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_1 \arrow[r, "s\times t"] \arrow[d, "f_1"'] & \mathcal{G}_0 \times \mathcal{G}_0 \arrow[d, "f_0\times f_0"] \\
\mathcal{H}_1 \arrow[r, "s\times t"] & \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_2 \arrow[r, "comp"] \arrow[d, "f_1\times f_1"'] & \mathcal{G}_1 \arrow[d, "f_1"] \\
\mathcal{H}_2 \arrow[r, "comp"] & \mathcal{H}_1
\end{tikzcd}$$

$X = \mathcal{G}_0 = \mathcal{H}_0$ の時、X 上の位相亜群の射とは、位相亜群の射 $f : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ であって、$f_0 = id$ となるもののことである。

つまり、亜群の射とは要するに関手のことであり、位相亜群の射と呼ぶときは構成する写像がそれぞれ連続であることを要請している。ここで、群準同型の時と同様に、厳密には恒等射を保つことも要請されているが、それは上記の仮定から導かれるため省略している。誤解のないときは、右下の添え字を省略する。

関手の次は自然変換も定義する。

定義 1.12 (位相亜群の圏の 2-射)**.** $f, f' : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ は位相亜群の射とする。2-射 $\sigma : f \to f'$ とは、連続写像 $\mathcal{G}_0 \to \mathcal{H}_1$ 次の二つの図式を可換にするもののことである。

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{G}_0 \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dr, "f'"] & \\ \mathcal{H}_0 & \mathcal{H}_1 \arrow[l, "s"] \arrow[r, "t"'] & \mathcal{H}_0 \end{tikzcd}$$

2-射 $\sigma : f \to f'$ が存在するとき、$f \cong f'$ と書く。

注意 1.13. 位相亜群の圏では、2-射は常に同型である。

1.1.3 位相亜群の同型と同値

2-射が存在するため、位相亜群の圏では同型のほかに同値の概念を定義することができる。

定義 1.14. 位相亜群の射 $f : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ が同型 *(isomorphism)* であるとは、逆射と呼ばれる逆向きの射 $f' : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ が存在して、$f \circ f' = id,\ f' \circ f = id$ を満たすことである。この時、$\mathcal{G} \cong \mathcal{H}$ と書く。

位相亜群の射 $f : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ が同値 *(equivalence)* であるとは、逆射と呼ばれる逆向きの射 $f' : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ が存在して、$f \circ f' \cong id,\ f' \circ f \cong id$ を満たすことである。この時、$\mathcal{G} \simeq \mathcal{H}$ と書く。

位相亜群の射 $f : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ が同型であることは、$f_0 : \mathcal{G}_0 \to \mathcal{H}_0$ および $f_1 : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{H}_1$ が同相写像になることと同値である。

一方、圏の間の関手が同値を定めるための必要十分条件として、"充満忠実" かつ "本質的全射" というものが知られている。Lie 亜群の間にはこれを満たすものとして弱同値 (weak equivalence) というクラスを定義するのだが、位相亜群の間には定義できない。なぜなら、位相空間の圏における "沈めこみ" を定義していないからである。しかし、エタール位相亜群の間にはこれを定義することができる。

定義 1.15. $\mathcal{G},\ \mathcal{H}$ はエタール位相亜群とする。位相亜群の射 $f : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ が弱同値 *(weak equivalence)* であるとは、次を満たすことである。

充満忠実 次の図式が引き戻しになる。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "s \times t"'] & \mathcal{H}_1 \arrow[d, "s \times t"'] \\ \mathcal{G}_0 \times \mathcal{G}_0 \arrow[r, "f_0 \times f_0"] & \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0 \end{tikzcd}$$

本質的全射 次の合成が全射局所同相写像になる。ただし、$\mathcal{G}_0 \times_{\mathcal{H}_0} \mathcal{H}_1 = \{(x, h) \mid f_0(x) = s(h)\}$ である。

$$t \circ pr_2 : \mathcal{G}_0 \times_{\mathcal{H}_0} \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_0$$

命題 1.16. $f : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ はエタール位相亜群の間の弱同値とする。このとき、f_0, f_1 は共に局所同相写像である。

証明. 次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_0 \times_{\mathcal{H}_0} \mathcal{H}_1 \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] & \mathcal{H}_1 \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] & \mathcal{H}_0 \\ \mathcal{G}_0 \arrow[r, "f_0"] & \mathcal{H}_0 & \end{tikzcd}$$

$t \circ pr_2$ と t が局所同相写像だから、pr_2 は局所同相写像である。s が局所同相写像であることとより、$s \circ pr_2 = f_0 \circ pr_1$ は局所同相写像である。また、全射局所同相写像 s の引き戻しである pr_1 も全射局所同相写像である。よって、f_0 は局所同相写像である。

f_1 が局所同相写像であることは次の図式より従う。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "s"'] & \mathcal{H}_1 \arrow[d, "s"'] \\ \mathcal{G}_0 \arrow[r, "f_0"] & \mathcal{H}_0 \end{tikzcd}$$

□

命題 1.17. $f : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ はエタール位相亜群の間の弱同値とする。f が同値である時、かつその時に限り、次の写像は大域切断を持つ。

$$t \circ pr_2 : \mathcal{G}_0 \times_{\mathcal{H}_0} \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_0$$

証明. f が同値であったとして、その逆射を $g : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ とする。$f \circ g \cong id$ を実現する 2-射を $\sigma : f \circ g \to id$ とする。σ は連続写像 $\mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_1$ である。この時、$g_0 \times \sigma$ が連続写像 $\mathcal{H}_0 \to \mathcal{G}_0 \times_{\mathcal{H}_0} \mathcal{H}_1$ を定め、これは $t \circ pr_2$ の切断である。

逆に、$t \circ pr_2$ が切断 $g_0 \times \sigma$ を持っていたとする。次の図式が連続写像 $\tau : \mathcal{G}_0 \to \mathcal{G}_1$ を導く。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_0 \arrow[dr, dotted, "\tau"] \arrow[drr, bend left, "\sigma \circ f_0"] \arrow[ddr, bend right, "(g_0 \times g_0) \circ (s \times t)"'] & & \\ & \mathcal{G}_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "s \times t"'] & \mathcal{H}_1 \arrow[d, "s \times t"'] \\ & \mathcal{G}_0 \times \mathcal{G}_0 \arrow[r, "f_0 \times f_0"] & \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0 \end{tikzcd}$$

また、次の図式が連続写像 $g_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{G}_1$ を導く。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_1 \arrow[dr, dotted, "g_1"] \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "(g_0 \circ f_0) \times id"'] & & \\ & \mathcal{G}_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "s \times t"'] & \mathcal{H}_1 \arrow[d, "s \times t"'] \\ & \mathcal{G}_0 \times \mathcal{G}_0 \arrow[r, "f_0 \times f_0"] & \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0 \end{tikzcd}$$

ただし、$\alpha(h) = \sigma(f_0(g_0(t(h))))^{-1} \cdot h \cdot \sigma(f_0(g_0(s(h))))$ としている。これらは射 $g : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ と 2-射 $\sigma : f \circ g \to id$ および $\tau : g \circ f \to id$ を定める。 □

1.1.4 弱引き戻し

位相亜群の圏は 2-圏である。そこで、極限についても 2-圏における極限を考えるべきである。次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{H} \arrow[d, "f'"'] \\ \mathcal{G} \arrow[r, "f"] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$$

この図式の 2-圏における引き戻しを与えたい。圏論の言葉をよく知っていれば、それはコンマ圏 $(f \downarrow f')$ のことである。具体的には次のように定義する。

$$\begin{array}{rcl} (f \downarrow f')_0 & = & \{(x,k,y) \in \mathcal{G}_0 \times \mathcal{K}_1 \times \mathcal{H}_0 \,|\, k : f(x) \to f'(y)\} \\ (f \downarrow f')_1 & = & \{(k_1,g,h,k_2) \in \mathcal{K}_1 \times \mathcal{G}_1 \times \mathcal{H}_1 \times \mathcal{K}_1 \,|\, f'(h) \circ k_1 = k_2 \circ f(g)\} \\ s(k_1,g,h,k_2) & = & (s(g),k_1,s(h)) \\ t(k_1,g,h,k_2) & = & (t(g),k_2,t(h)) \end{array}$$

つまり、$\mathcal{K}$ 上の次のような各可換図式を射としている。

$$\begin{tikzcd} f(x_1) \arrow[r, "f(g)"] \arrow[d, "k_1"'] & f(x_2) \arrow[d, "k_2"'] \\ f'(y_1) \arrow[r, "f'(h)"] & f'(y_2) \end{tikzcd}$$

この時、自然な射 $(f \downarrow f') \to \mathcal{G}$, $(f \downarrow f') \to \mathcal{H}$ が存在し、次の普遍性を満たす。

命題 1.18. 次の図式はある 2-射 σ による変換を通して可換である。

$$\begin{tikzcd} (f \downarrow f') \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H} \arrow[d, "f'"'] \\ \mathcal{G} \arrow[r, "f"] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$$

また、次の図式が 2-射 τ による変換を通して可換であったとする。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H} \arrow[d, "f'"'] \\ \mathcal{G} \arrow[r, "f"] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$$

この時、次の図式の左と上の三角形を（厳密に）可換とする射 $\mathcal{L} \to (f \downarrow f')$ であって、σ との合成が τ に一致するものがただ一つ存在する。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} \arrow[dr] \arrow[drr] \arrow[ddr] & & \\ & (f \downarrow f') \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H} \arrow[d, "f'"'] \\ & \mathcal{G} \arrow[r, "f"] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$$

位相亜群の圏におけるコンマ圏のことを弱引き戻し (weak pull-back) と呼ぶ。

1.2　エタール位相亜群と弱同値

エタール位相亜群について、もう少し詳しく見てみよう。

まず、任意の位相亜群に対して普遍的なエタール位相亜群が存在する。$\mathcal{G}$ が $X=\mathcal{G}_0$ 上の位相亜群であったとする。各開集合 $U \subset X$ に対し、

$$\mathcal{F}(U)=\{\sigma : U \to \mathcal{G}_1 \mid s\circ\sigma = id, t\circ\sigma \text{は局所同相写像}\}$$

とする。$\mathcal{F}$ は X 上の層である。$\mathcal{F}$ に対応するエタール空間を $\tilde{s} : \tilde{\mathcal{G}}_1 \to X$ と表す。集合としては $\tilde{\mathcal{G}}_1 = \coprod \mathcal{F}_x$ であり、各芽 $\sigma_x \in \mathcal{F}_x$ に対し $\tilde{s}(\sigma_x)=x$ である。$\mathcal{F}$ の各芽 $\sigma_x \in \mathcal{F}_x$ に対し、$\tilde{t}(\sigma_x)=t(\sigma(x))$ とすることで、$\tilde{t} : \tilde{\mathcal{G}}_1 \to \mathcal{G}_0$ が well-defined に定まる。

$$\tilde{\mathcal{G}}_2 = \{(\sigma_x,\tau_y) \in \tilde{\mathcal{G}}_1 \times \tilde{\mathcal{G}}_1 \mid \tilde{s}(\sigma_x)=\tilde{t}(\tau_y)\}$$

とする。各 $(\sigma_x,\tau_y) \in \tilde{\mathcal{G}}_2$ に対し、$\sigma_x \circ \tau_y$ を次のように定める。x 周りの十分小さい開近傍 U および y 周りの十分小さい開近傍 V で、σ(resp. τ) が U(resp. V) 上定義されていて、$(t\circ\tau)(V) \subset U$ なるものをとる。このとき、$(\sigma\circ t\circ\tau)\times\tau$ は連続写像 $V \to \mathcal{G}_2$ を定める。これと $comp : \mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}_1$ の合成は $\mathcal{F}(V)$ に含まれる。そこで、

$$\sigma_x \circ \tau_y = (comp \circ ((\sigma\circ t\circ\tau)\times\tau))_y$$

とする。この写像を $\tilde{comp}$ と表す。

補題 1.19. $\tilde{comp} : \tilde{\mathcal{G}}_2 \to \tilde{\mathcal{G}}_1 ; (\sigma_x,\tau_y) \mapsto \sigma_x\circ\tau_y$ は連続である。

証明. 各 $\mu \in \mathcal{F}(W)$ に対し、

$$[\mu, W] = \{\mu_x \mid x \in W\}$$

とする。層の一般論によれば、$\tilde{\mathcal{G}}_1$ の位相は $[\mu,W]$ 達によって生成されていたのであった。よって、各 $\tilde{comp}^{-1}([\mu,W])$ が開集合であればよい。

任意の $(\sigma_x,\tau_y) \in \tilde{comp}^{-1}([\mu,W])$ をとる。ここで、前段に現れる U,V をとって $\sigma_x\circ\tau_y = (comp\circ((\sigma\circ t\circ\tau)\times\tau))_y = \mu_y$ と表す。V を小さく制限すれば、$comp\circ((\sigma\circ t\circ\tau)\times\tau)=\mu$ としてよい。このとき、$(\sigma_x,\tau_y) \in [\sigma,U]\times_{\mathcal{G}_0}[\tau,V] \subset \tilde{comp}^{-1}([\mu,W])$ である。よって、$\tilde{comp}^{-1}([\mu,W])$ は開集合である。 □

同様にして $\tilde{inv}$ や $\tilde{i}$ も連続写像として well-defined に定まる。また、$\tilde{\mathcal{G}}_0 = X$ として定める。結局、次が言える。

命題 1.20. $\tilde{\mathcal{G}}$ は X 上の位相亜群である。さらにこれはエタールである。

この時、自然な射 $\epsilon : \tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ が $\epsilon(\sigma_x)=\sigma(x)$ により定まる。これは次の普遍性を満たす。

命題 1.21. X 上の任意のエタール位相亜群 $\mathcal{H}$ と任意の射 $f : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ に対し、射 $\tilde{f} : \mathcal{H} \to \tilde{\mathcal{G}}$ が存在して、次の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathcal{G}} \arrow[r, "\epsilon"] & \mathcal{G} \\
\mathcal{H} \arrow[u, "\tilde{f}"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

証明. □

1.3 亜群の幾何学的実現

位相圏 $\mathcal{C}$ には、二つの標準的な単体的空間 $B\mathcal{C}$ と $E\mathcal{C}$ が対応する。まず、$B\mathcal{C}$ は次のように定義される。

$$
\begin{aligned}
B\mathcal{C}_n &\overset{\text{def}}{=} \begin{cases} Ob(\mathcal{C}) & (n=0) \\ \{(f_n, f_{n-1}, \cdots, f_1) : \text{合成可能な } n \text{ 対の射}\} & (otherwise) \end{cases} \\
d_i^n(f_n, f_{n-1}, \cdots, f_1) &\overset{\text{def}}{=} \begin{cases} (f_n, f_{n-1}, \cdots, f_2) & (i=0) \\ (f_n, f_{n-1}, \cdots, f_{i+1} \circ f_i, \cdots, f_1) & (1 \le i \le n-1) \\ (f_{n-1}, f_{n-2}, \cdots, f_1) & (i=n) \end{cases} \\
s_i^n(f_{n-1}, f_{n-2}, \cdots, f_1) &\overset{\text{def}}{=} (f_{n-1}, f_{n-2}, \cdots, f_{i+1}, id, f_i, \cdots, f_1)
\end{aligned}
$$

直感的には、$B\mathcal{C}$ の構成は可換図式に対して単体を貼る操作である。例えば次の三角形の図式には二次元単体を貼ることになる。

$$
\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[dr, "f_2"] & \\
\cdot \arrow[ur, "f_1"] \arrow[rr, "f_2 \circ f_1"] & & \cdot
\end{tikzcd}
$$

定義 1.22. $\mathcal{C}$ を位相圏とする。単体的空間 $B\mathcal{C}$ の幾何学的実現 $|B\mathcal{C}|$ を $\mathcal{C}$ の幾何学的実現と呼ぶ。

注意 1.23. 普通、単体的空間 $B\mathcal{C}$ のことは $\mathcal{C}$ のナーヴ (nerve) または神経と呼び、$N(\mathcal{C})$ などと書く。今回はこれを幾何学的実現と区別しないため、あえて $B\mathcal{C}$ と書いている。圏のナーヴはある意味で圏そのものであり、実際、圏 (または一般に ∞-圏) を特殊な単体的集合として定義することもできる。このような扱いは、特に ∞-亜群を取り扱う際に便利である。実際、この同一視の下で、∞-亜群とは “Kan 複体” そのものである。

もう一つの標準的な単体的空間 $E\mathcal{C}$ は次のように定義される。

$$
\begin{aligned}
E\mathcal{C}_n &\overset{\text{def}}{=} \{(f_n, f_{n-1}, \cdots, f_0) : \text{始域を共有する } n+1 \text{ 対の射}\} \\
d_i^n(f_n, f_{n-1}, \cdots, f_0) &\overset{\text{def}}{=} (f_n, f_{n-1}, \cdots, \check{f_i}, \cdots, f_0) \\
s_i^n(f_{n-1}, f_{n-2}, \cdots, f_0) &\overset{\text{def}}{=} (f_{n-1}, f_{n-2}, \cdots, f_i, f_i, \cdots, f_1)
\end{aligned}
$$

直感的には、$E\mathcal{C}$ の構成は、始域を共有する射の順序対を頂点の順序対と対応させることで単体と見なしている。

$\mathcal{G}$ を位相亜群とする。射 $p : E\mathcal{G} \to B\mathcal{G}$ を、次のように定める。(t は終域写像である。)

$$
\begin{aligned}
p_0(g_0) &\overset{\text{def}}{=} t(g_0) \\
p_n(g_n, g_{n-1}, \cdots, g_0) &\overset{\text{def}}{=} (g_n \circ g_{n-1}^{-1}, g_{n-1} \circ g_{n-2}^{-1}, \cdots, g_1 \circ g_0^{-1}) \quad (n \ge 1)
\end{aligned}
$$

命題 1.24.

$$p_n(g_n, g_{n-1}, \cdots, g_0) = p_n(h_n, h_{n-1}, \cdots, h_0) \Leftrightarrow {}^{\exists} k \ s.t. \ h_i = g_i \circ k \ ({}^{\forall} i)$$

証明. $\Leftarrow$ は明らか。$\Rightarrow$ は $k \overset{\text{def}}{=} g_n^{-1} \circ h_n$ とすればよい。 □

これは、$E\mathcal{G}$ に $\mathcal{G}$ 自身が (右から) 作用しており、その商空間が $B\mathcal{G}$ であることを意味している。p はその商写像である。これはすなわち、$p : E\mathcal{G} \to B\mathcal{G}$ が “主 $\mathcal{G}$-束” であることに他ならない。

2　亜群が定める構造

B を位相空間、G を位相群とする。B 上の G-束の構造は、適切な同値関係を入れたコサイクルの集合 $H^1(B,G)$ と一対一に対応する。一方、B 上の多様体構造や葉層構造は、$\mathbb{R}^n$ 上の擬群構造を用いて定義される。このような構造を一般化して、統一的に扱いたい。そのためには、位相群と擬群を統一的に扱うことができる、位相亜群が便利である。位相亜群とは "位相群の作用する空間" の一般化である。

また、幾何学的実現を通して、主束の分類空間と普遍主束を構成する。

主に [2] の Chapter 1. を参考にした。亜群については [3] を読むとよい。構造群を持つファイバー束については、Pantodon Web Site[4] に非常に有用な pdf があったのだが、最近出版された [1] らしい。Web 上ではもう読めないかもしれない。

2.1　亜群作用とファイバー束

F は位相空間、$\mathcal{G}$ は位相亜群とする。$\mathcal{G}$ が F に右から作用していると仮定し、そのアンカーを ρ と表す。

"F をファイバーに持つファイバー束" を定義したい。しかし、$\mathcal{G}$ の各射は同相写像 $F \to F$ を定めるわけではなく、あくまで局所的な力学系を記述しているのみである。つまり、ファイバーと呼ぶべきは F ではなく各 $\rho^{-1}(x)$ であり、F はファイバーの連続な族を指定しているのである。そのため、自明束を定義するにしても、単に F を直積すればよいというものではない。まずは自明束の定義を述べよう。

定義 2.1 (自明束)**.** B を位相空間とする。B の $\mathcal{G}$-自明化アンカー † とは、連続写像 $\rho_{tri.} : B \to \mathcal{G}_0$ のことである。この時、$B \times_{\mathcal{G}_0} F = \{(b,x) \mid \rho_{tri.}(b) = \rho(x)\}$ のことを、F にファイバー族を持つ自明な $\mathcal{G}$-束と呼ぶ。

例 2.2 (位相群の場合). $\mathcal{G}_0$ が一点集合 $*$ の場合、$\mathcal{G}$ は位相群である。このとき、自明化アンカーは自明な一点写像 $B \to *$ であり、$B \times_{\mathcal{G}_0} F = B \times F$ である。

一般のファイバー束は自明束の貼り合わせである。

定義 2.3 (ファイバー束)**.** F にファイバー族を持つ $\mathcal{G}$-束 $\xi = (E, \pi, B)$ とは、位相空間 E, B および連続写像 $\pi : E \to B$ からなる組であって、次のデータを備えたもののことである。

アトラス B の開被覆 $\{U_i\}_i$

自明束の指定 各 U_i の $\mathcal{G}$-自明化アンカー $\rho_i : U_i \to \mathcal{G}_0$

自明化写像 同相写像 $h_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times_{\mathcal{G}_0} F$ で、次の図式を可換にするもの

$$
\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_i) \arrow[r, "h_i"] \arrow[d, "\pi"'] & U_i \times_{\mathcal{G}_0} F \arrow[d, "pr_1"] \\
U_i \arrow[r, equal] & U_i
\end{tikzcd}
$$

推移関数 推移関数と呼ばれる連続写像 $\sigma_{ij} : U_{ij} \to \mathcal{G}_1$ で、次の図式を可換にするもの

$$
\begin{tikzcd}
 & U_{ij} \arrow[dl, "\rho_i"'] \arrow[d, "\sigma_{ij}"] \arrow[dr, "\rho_j"] & \\
\mathcal{G}_0 & \mathcal{G}_1 \arrow[l, "t"] \arrow[r, "s"'] & \mathcal{G}_0
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & (U_{ij} \times_{\mathcal{G}_0} F)_j \\
(U_{ij} \times_{\mathcal{G}_0} F)_i \arrow[ur, "h_j \circ h_i^{-1}"] \arrow[r, "id \times id \times \sigma_{ij}"'] & U_{ij} \times_{\mathcal{G}_0} F \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \arrow[u, "id \times \mu"']
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

ただし、

$$
\begin{aligned}
U_{ij} = U_i \cap U_j,\ \mu(x, g) = x \cdot g, \\
(U_{ij} \times_{\mathcal{G}_0} F)_k &= \{(b, x) \mid \rho_k(b) = \rho(x)\}, \\
U_{ij} \times_{\mathcal{G}_0} F \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 &= \{(b, x, g) \mid \rho_i(b) = \rho(x) = t(g)\}
\end{aligned}
$$

上記のデータを、位相亜群の観点で整理しよう。
まず、開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ より、位相亜群 $B_{\mathcal{U}}$ が次のように定まる。

$$
\begin{aligned}
(B_{\mathcal{U}})_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \coprod U_i \times \{i\} \\
(B_{\mathcal{U}})_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \coprod U_{ij} \times \{(j, i)\}
\end{aligned}
$$

ここで、各 $x \in B$ に対して (x, j, i) を $(x, i) \to (x, j)$ なる射と見なしている。さらに、自明化アンカーと推移関数の組は可換図式 (1) により、位相亜群の射 $B_{\mathcal{U}} \to \mathcal{G}$ を定める。

$B_{\mathcal{U}}$ のことを $\mathcal{U}$ の Čech 亜群と呼び、射 $B_{\mathcal{U}} \to \mathcal{G}$ のことをコサイクルと呼ぶ。ファイバー束を定めるデータは、コサイクルと自明化写像によって定まり、その条件は、自明化写像の変換がコサイクルによって表現されていること (可換図式 (2) と対応) である。

逆に、コサイクル $B_{\mathcal{U}} \to \mathcal{G}$ が存在した時、$\mathcal{G}$ が作用する任意の F に対し、F にファイバー族を持つ $\mathcal{G}$-束を構成することができる。実際、各自明束 $U_i \times_{\mathcal{G}_0} F \to U_i$ を推移関数

で貼り合わせればよい。この対応によって、コサイクルとファイバー束は同一視することができる。ただし、実際に一対一の対応を構成するには、それぞれに適切な同値関係を定める必要がある。

2.2　ファイバー束の同型

まずは自明束の同型の定義を述べよう。

定義 2.4 (自明束の同型). B を位相空間とし、$\rho_1, \rho_2 : B \to \mathcal{G}_0$ は $\mathcal{G}$-自明化アンカーとする。ρ_1 と ρ_2 の間の同型または推移関数とは、連続写像 $\tau : B \to \mathcal{G}_1$ で、次の図式を可換にするもののことである。

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "\rho_1"'] \arrow[d, "\tau"] \arrow[dr, "\rho_2"] & \\ \mathcal{G}_0 & \mathcal{G}_1 \arrow[l, "t"] \arrow[r, "s"'] & \mathcal{G}_0 \end{tikzcd}$$

同型変換が存在するとき、ρ_1 と ρ_2 は同型であるという。

位相亜群の言葉で言い換えてみよう。位相空間 B はそれ自体が恒等射のみからなる位相亜群と見なせる。このとき、ρ_1, ρ_2 はそれぞれ位相亜群の射 $B \to \mathcal{G}$ を定める。同型とは、この二つの射の間の自然同型のことである。

さて、このような同型 τ が存在した時、ρ_1 から定まる自明束 $(B \times_{\mathcal{G}_0} F)_1 \to B$ と ρ_2 から定まる自明束 $(B \times_{\mathcal{G}_0} F)_2 \to B$ の間には、$(b, x) \mapsto (b, x \cdot \tau(b))$ によって同相写像が定まる。このようにして定まる同相写像を $\mathcal{G}$-束の同型と呼ぶ。定義 2.3 の推移関数の条件 (2) は、自明化写像の変換が、推移関数から定まる $\mathcal{G}$-束の同型と一致することを意味している。

次に、構造と両立するチャートを定めよう。

定義 2.5. F にファイバー族を持つ $\mathcal{G}$-束 $\xi = (E, \pi, B)$ の構造が $\{U_i, \rho_i, h_i, \sigma_{ij}\}$ によって定まっているとする。ξ の構造と両立するチャートとは、開集合 $U \subset B$、U の自明化アンカー ρ_U および自明化写像 $h : \pi^{-1}(U) \to U \times_{\mathcal{G}_0} F$ からなる三つ組 (U, ρ_U, h) であって、任意の i に対して $U \cap U_i$ 上で ρ_U と ρ_i が同型であり、そこから定まる $\mathcal{G}$-束の同型が $h_i \circ h^{-1}$ に一致するもののことである。

ここまで定義できれば、一般のファイバー束の同型が定義できる。

定義 2.6. $\xi_k = (E_k, \pi_k, B_k)(k = 1, 2)$ は F にファイバー族を持つ二つの $\mathcal{G}$-束とする。$\mathcal{G}$-束の同型 $(f, \hat{f}) : \xi_1 \to \xi_2$ とは、二つの同相写像 $f : B_1 \to B_2$ と $\hat{f} : E_1 \to E_2$ の組であって、次を満たすもののことである。

- 次の図式が可換である。

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ B_1 \arrow[r, "f"] & B_2 \end{tikzcd}$$

- 任意の $b \in B_1$ に対し、構造と両立する b 周りのチャート (U_1, ρ_1, h_1) と、$f(b)$ 周りのチャート (U_2, ρ_2, h_2) が存在し、次を満たす。
  - $U_2 = f(U_1)$
  - ρ_1 と $\rho_2 \circ f$ が同型で、そこから定まる $\mathcal{G}$-束の同型が $(f \times id)^{-1} \circ h_2 \circ \hat{f} \circ h_1^{-1}$ に一致する。ただし、$f \times id : U_1 \times_{\mathcal{G}_0} F \to U_2 \times_{\mathcal{G}_0} F$ が同相写像であることに注意。

2.3 忠実な作用

$(f, \hat{f}) : \xi_1 \to \xi_2$ が $\mathcal{G}$-束の同型であるとは、“(局所的に) $\hat{f}$ を実現する推移関数の存在” を要請してることに他ならない。しかし、そのような推移関数は $(f, \hat{f})$ のみから一意的に定まるわけではない。位相群の場合で次の自明な例を見てみよう。

F を位相空間、G を非自明な位相群とし、G は F に自明に右から作用しているとする。つまり、$x \cdot g \stackrel{\text{def}}{=} x$ によって作用を定める。この時、任意の同相写像 $f : B_1 \to B_2$ に対し、f と $f \times id : B_1 \times F \to B_2 \times F$ の組は G-束の同型である。この時、任意の連続写像 $\sigma : B_1 \to G$ に対し $(f \times id)(b, x) = (f(b), x \cdot \sigma(b))$ が成り立ってしまう。

そこで、$\mathcal{G}$-束の同型と呼ぶべき対象は二つの連続写像の組 $(f, \hat{f})$ ではなく、そこに推移関数のデータを加えたものとみるべきだろう。上記の自明な例でいえば、二つの異なる $\sigma_1, \sigma_2 : B_1 \to G$ に対し、$(f, \hat{f}, \sigma_1)$ と $(f, \hat{f}, \sigma_2)$ を区別するのである。

しかし、通常このような議論は非常に勝手が悪い。そこで、推移関数が $(f, \hat{f})$ のみから一意的に定まるための十分条件を与えたい。上記の例では、$Ker[G \to Homeo(F)]$ が非自明であるために起こる現象である。作用が “忠実” であれば、このような問題は起こらないのである。一般に、位相亜群の作用に対しても忠実性を定義することができる。これを見よう。

F は位相空間、$\mathcal{G}$ は位相亜群とする。$\mathcal{G}$ が F に (右から) 作用していると仮定し、そのアンカーを ρ と表す。位相亜群 $\mathrm{Fib}(F, \rho)$ を次で定める。

$$\begin{aligned} \mathrm{Fib}(F,\rho)_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{G}_0 \\ \mathrm{Fib}(F,\rho)_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \{\rho^{-1}(x) \to \rho^{-1}(y) \text{ なる連続写像} \mid x, y \in \mathcal{G}_0\} \end{aligned}$$

この時、位相亜群の間の (反変な) 射 $\mathcal{G} \to \mathrm{Fib}(F, \rho)$ が自然に定まる。

定義 2.7. $\mathcal{G}$ の F への作用が忠実であるとは、上記の射 $\mathcal{G} \to \mathrm{Fib}(F, \rho)$ が単射になることである。

任意に位相亜群作用が存在した時、それと同等な忠実な作用に置き換えることができる。実際、$Im[\mathcal{G} \to \mathrm{Fib}(F, \rho)]$ を新たに $\mathcal{G}$ と置き換えればよい。

2.4 被覆ホモトピー定理の崩壊

構造群 G を持つファイバー束に対し、次の定理がよく知られている。

定理 2.8 (被覆ホモトピー定理)**.** $\xi = (E, \pi, B)$ は G-束とし、X はパラコンパクト・ハウスドルフ空間とする。さらに、次の図式が可換とする。

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

ここで、$H_0 = f$ なるホモトピー $H_t : X \to B$ が存在するならば、$\tilde{H}_0 = \tilde{f}$ なるホモトピー $\tilde{H}_t : X \to E$ で次の図式を可換にするものが存在する。

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{H}_t"] \arrow[r, "H_t"'] & B \end{tikzcd}$$

この定理は、ファイバー束が Serre 束であることを主張する重要な定理である。しかしこれは、位相亜群が作用するファイバー族を考えたとき、一般には成り立たない。

例 2.9.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= \mathbb{R} \times I \\ \mathcal{G}_0 &= I \\ & s(v,x) = t(v,x) = x \\ & (v,x) \cdot (u,x) = (v+u, x) \end{aligned}$$

によって位相亜群 $\mathcal{G}$ を定める。これを次の同値関係で割った商亜群を $\mathcal{H}$ とする。

$$(v,x) \sim (u,x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, v = u \\ \text{または} \\ x \neq 0, x(v-u) \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ρ を $\mathcal{H}$ の始域写像とすれば、$\mathcal{H}$ は $F = \mathcal{H}_1$ に右作用を持つ。このとき、$id : I(=B) \to I$ を自明化アンカーとして、$\rho(=\pi) : F(=E) \to B$ はそれ自身が自明な $\mathcal{H}$-束である。ここで、$H_t : S^1 \to B$ を $H_t(\theta) = t$ によって定め、$f = H_1$ とする。また、$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と同一視することにより、$\tilde{f} : S^1 \to E$ を $\tilde{f}(\theta) = (\theta, 1)$ によって定める。このとき、次の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ S^1 \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

一方、$\tilde{H}_1 = \tilde{f}$ なるホモトピー $\tilde{H}_t : X \to E$ で次の図式を可換にするものは、$t = 0$ の周りで存在しない。

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ S^1 \arrow[ur, "\tilde{H}_t"] \arrow[r, "H_t"'] & B \end{tikzcd}$$

これを示すため、もしもこのような $\tilde{H}_t$ が存在したと仮定して、次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
S^1 \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{H}_0"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, equal] \\
S^1 \times I \arrow[r, "\tilde{H}"] & E \arrow[d, equal] \\
S^1 \times \{1\} \arrow[r, "\tilde{H}_1"] \arrow[u, hook] & E
\end{tikzcd}$$

基本群をとると、次の図式がとれる。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\pi_1(\tilde{H}_0)", "0"'] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "\pi_1(\tilde{H})", "\cong"'] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "\pi_1(\tilde{H}_1)", "\cong"'] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

$\pi_1(\tilde{H}_1)$ が同型だから、$\pi_1(\tilde{H})$ および $\pi_1(\tilde{H}_0)$ も同型でなければならない。しかし、$\tilde{H}_0 : S^1 \to \pi^{-1}(0) \to E$ と $\pi^{-1}(0) \cong \mathbb{R}$ より、$\pi_1(\tilde{H}_0) = 0$ でなければならない。これは矛盾である。

上記の例は、$\pi^{-1}(0)$ と $\pi^{-1}(1)$ がホモトピー同値でないところがキモである。同じアイデアにより、構造群 G を持つファイバー束についてよく知られた次のような定理も、一般には成り立たない。

定理 2.10. B_1, B_2 はパラコンパクト・ハウスドルフ空間とする。B_1 と B_2 がホモトピックならば、B_1 上の G-束と B_2 上の G-束の間には一対一の対応がある。

定理 2.11. 分類空間と呼ばれる位相空間 BG が存在し、次を満たす。任意のパラコンパクト・ハウスドルフ空間 B に対し、B 上の G-束と $B \to BG$ のホモトピー類の間には一対一の対応がある。

定理 2.11 の一般化はそのままの形では成り立たないが、適切な修正が可能である。また、構造亜群の対象空間に離散位相が入っているなど特殊な場合には、多くの議論がそのまま成り立つ。

参考文献

[1] **ファイバー束とホモトピー**. 森北出版, 2020.

[2] P Frejlich. *h-principles around Poisson geometry*. PhD thesis, Ph. D. thesis, Instituto Superior Tecnico, 2011.

[3] Ieke Moerdijk and Janez Mrcun. *Introduction to foliations and Lie groupoids*, volume 91. Cambridge University Press, 2003.

[4] 玉木大. Pantdon web site. https://pantodon.shinshu-u.ac.jp.