イソトピーに関する注意

東京工業大学修士一年　山崎　晃司

2017/08/24

イソトピーは通常、閉区間 I 上のファイバーの埋め込みとして定義される．一方，いくつかの文献では space of embeddings 上の”曲線”として定義されているが，これらの定義が同値であるか否かについてはあまり注意が払われていないように思う．今回は実際にその反例を構成し，二つの定義が同値でないことを紹介する．しかし，定義域がコンパクトであるか，余次元が 0 かつ定義域が境界を持たないとき，これらの定義の同値性は容易に示せる．よって，例えば結び目理論等を研究する上ではこれらを区別する必要はない．

M, N を C^r 級多様体（$0 \leq r \leq \infty$）とする．また，$I = [0,1]$ とし，$t \in I$ に対して $p \mapsto (p,t)$ を t で表す．

定義 1 (イソトピーの二つの定義)

二つの C^r 級写像 $f_0 f_1 : M \to N$ のイソトピーとは，埋め込み $\hat{F} : M \times I \to N \times I$ であって，次の図式を可換にするものとする．

$$
\begin{tikzcd}
M \times I \arrow[r, "\hat{F}"] \arrow[d, "pr_2"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \times I \arrow[d, "pr_2"] \\
I \arrow[r, equal] & I
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \times I \arrow[r, "\hat{F}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \times I \\
M \arrow[u, "0"] \arrow[r, "f_0"] & N \arrow[u, "0"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \times I \arrow[r, "\hat{F}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \times I \\
M \arrow[u, "1"] \arrow[r, "f_1"] & N \arrow[u, "1"']
\end{tikzcd}
$$

二つの C^r 級写像 $f_0 f_1 : M \to N$ の弱イソトピーとは，f_0 と f_1 のホモトピー $F : M \times I \to N ; (p,t) \mapsto F_t(p)$ であって，すべての t に対して $F_t : M \to N$ が埋め込みとなるものとする．

今，$\hat{F} : M \times I \to N \times I$ および $F : M \times I \to N ; (p,t) \mapsto F_t(p)$ が与えられたとして，さらに $\hat{F}(p,t) = (F_t(p), t)$ を満たすとする．

命題 2

(i) $\hat{F}$ がイソトピー $\Rightarrow$ F が弱イソトピー

(ii) F が弱イソトピー $\Rightarrow$ $\hat{F}$ は単射であり，$r \geq 1$ の時ははめ込みでもある．

一般に，M がコンパクト $\Rightarrow$ $\hat{F}$ は閉写像.

$dimM = dimN$ かつ $\partial M = \phi \Rightarrow \hat{F}$ ははめ込みならば開写像.

が成り立つので，特にこの場合は $\hat{F}$ がイソトピー $\iff$ F が弱イソトピー

反例の構成

補題 3

$\exists\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で，次を満たすものが存在する．

(i) θ は C^∞ 級.

(ii) $|x| \geq \frac{1}{2}$ ならば $\theta(x) = 0$.

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して $\theta(x) = \theta(-x)$.

(iv) $-\frac{1}{2} < x < 0$ ならば $\theta'(x) > 0$.

(v) $\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)dx = 1$.

$$\because \quad \theta(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{4}{1-4x^2}) & (|x| < \frac{1}{2}) \\ 0 & (|x| \geq \frac{1}{2}) \end{cases}$$ とすればよい．□

補題 4

$\exists h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で，次を満たすものが存在する．

(i) h は C^∞ 級.

(ii) $\forall\epsilon \in (0, 5)$ に対し，h の $(0, 5-\epsilon)$ への制限は埋め込み.

(iii) $h(1) = h(5)$.

$\because x = 1, 5$ で交差する連続写像を軟化子 θ で smoothing すればよい．□

定理 5

$\exists\hat{F} : (-\infty, 1) \times I \to \mathbb{R}^2 \times I$ および $\exists F : (-\infty, 1) \times I \to \mathbb{R}^2; (p, t) \mapsto F_t(p)$ であって，$\hat{F}(p, t) = (F_t(p), t)$ と，次を満たすものが存在する．

(i) $\hat{F}$ および F は C^∞ 級.

(ii) $\hat{F}$ はイソトピーではない.

(iii) F は弱イソトピーである.

$\because \quad f_t(x) := \frac{t}{1-x} + \frac{1}{2-x}, \alpha_t(x) := (5-t)\frac{x}{1+x}$ として，

$$(-\infty, 1) \times I \xrightarrow{\hat{f}} (0, \infty) \times I \xrightarrow{\hat{\alpha}} (0, 5) \times I \xrightarrow{h \times id_I} \mathbb{R}^2 \times I$$

なる合成を $\hat{F}$ とすればよい．□

参考文献

[1]『微分トポロジー』M.W. ハーシュ [著], 松本堯生 [訳]