Braided Surfacesの同値関係

山崎 晃司

平成 30 年 3 月 12 日

[1] の Part 3 では、Surface Braids およびその一般化である Braided Surfaces の理論が展開される。これらの対象には四つの同値関係によってクラスが定められていたが、このうち二つの関係の間の強弱は問題として残されていた。しかし、イソトピーは時間について滑らかなものであると仮定することで、ここで残された二つの関係が全く同等なものであることは容易に証明できる。本稿ではこれを証明すると同時に、残りの二つの同値関係にも対応する（より弱い形の）同値関係を定義し、それぞれ対応するものと同等であることを示す。ただし、証明はすべて smooth の圏で行う。また、角付き多様体は角を解消した境界付き多様体とみなしてよいが、角を解消しなくても証明を適宜修正すれば正当化できる。証明はほとんどイソトピー拡張定理の証明をなぞったものである。

記号一覧

$I=[0,1]$: 閉区間
$D^2=D^2_1=D^2_2$: 2 次元単位円盤
ある位相空間の部分集合 A に対して、$int(A)$: A の内部
多様体 M に対して、$Int(M)=M-\partial M$
$S, S', S_u \subset D^2_1 \times D^2_2 : Braided\, Surface$
$h=\{h_u : D^2_1 \times D^2_2 \to D^2_1 \times D^2_2\}_{u\in I}, \underline{h}=\{\underline{h_u} : D^2_2 \to D^2_2\}_{u\in I}$
: アンビエントイソトピー（特に $h_0, \underline{h_0}$ は id）
$\hat{h} : D^2_1 \times D^2_2 \times I \to D^2_1 \times D^2_2 \times I, \underline{\hat{h}} : D^2_2 \times I \to D^2_2 \times I$: $h, \underline{h}$が定める同型写像
$X_h = \frac{\partial h}{\partial u} = \xi^1 X^1 + \xi^2 X^2 + \mu^1 Y^1 + \mu^2 Y^2 : D^2_1 \times D^2_2 \times I \to T(D^2_1 \times D^2_2)$
: h に同伴する、時間に依存するベクトル場
$\{X^1, X^2\}, \{Y^1, Y^2\}$: D^2_1, D^2_2上の標準座標から定まる基底ベクトル場

1 Surface Braid および Braided Surface

定義 1. *Braided Surface* とは、*properly* に埋め込まれたコンパクト二次元部分多様体 $S \subset Int(D_1^2) \times D_2^2$ であって、$pr_2 : D_1^2 \times D_2^2 \to D_2^2$ の S への制限が分岐被覆となるもののことである。

Surface Braid とは、*Braided Surface* $S \subset D_1^2 \times D_2^2$ であって、次を満たすもののことである。

・$^{\exists}Q_m \subset Int(D_1^2)$: 有限集合 $(|Q_m| = m)$ が存在して、$S \cap (D_1^2 \times \partial D_2^2) = Q_m \times \partial D_2^2$ □

定義 2. $S, S' \subset D_1^2 \times D_2^2$ を *Braided Surface* とする。また、$q \in \partial D_2^2$ をひとつ固定する。

(S1) S と S' が強同型 *(isomorphic in the strong sense)* であるとは、次を満たすアンビエントイソトピー $^{\exists}h = \{h_u : D_1^2 \times D_2^2 \to D_1^2 \times D_2^2\}_{u \in I}$ が存在することである。

(i) $h_1(S) = S'$

(ii) $h_u|_{D_1^2 \times \partial D_1^2} = id$

(iii) 次の図式が可換である。

$$\begin{tikzcd}
D_1^2 \times D_2^2 \arrow[r, "h_u"] \arrow[d, "pr_2"] & D_1^2 \times D_2^2 \arrow[d, "pr_2"] \\
D_2^2 \arrow[r, equal] & D_2^2
\end{tikzcd}$$

(W1) S と S' が弱同型 *(isomorphic in the weak sense)* であるとは、次を満たすアンビエントイソトピー $^{\exists}h = \{h_u : D_1^2 \times D_2^2 \to D_1^2 \times D_2^2\}_{u \in I}$ が存在することである。

(i) $h_1(S) = S'$

(ii) $h_u|_{D_1^2 \times \{q\}} = id$

(iii) 次の図式が可換である。

$$\begin{tikzcd}
D_1^2 \times D_2^2 \arrow[r, "h_u"] \arrow[d, "pr_2"] & D_1^2 \times D_2^2 \arrow[d, "pr_2"] \\
D_2^2 \arrow[r, equal] & D_2^2
\end{tikzcd}$$

(S1)' S と S' が *(S1)'* 関係であるとは、次を満たすイソトピー $^{\exists}f = \{f_u : S \to D_1^2 \times D_2^2\}_{u \in I}$ が存在することである。

(i) $f_0 = id, f_1(S) = S'$

(ii) $f_u|_{S \cap (D_1^2 \times \partial D_1^2)} = id$

(iii) 次の図式が可換である。

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "f_u"] \arrow[d, "pr_2"] & D_1^2 \times D_2^2 \arrow[d, "pr_2"] \\
D_2^2 \arrow[r, equal] & D_2^2
\end{tikzcd}$$

(W1)' S と S' が *(W1)'* 関係であるとは、次を満たすイソトピー $^\exists f = \{f_u : S \to D_1^2 \times D_2^2\}_{u \in I}$ が存在することである。

(i) $f_0 = id, f_1(S) = S'$

(ii) $f_u|_{S \cap (D_1^2 \times \{q\})} = id$

(iii) 次の図式が可換である。

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f_u"] \arrow[d, "pr_2"] & D_1^2 \times D_2^2 \arrow[d, "pr_2"] \\ D_2^2 \arrow[r, equal] & D_2^2 \end{tikzcd}$$

(S2) S と S' が強同値 *(equivalent in the strong sense)* であるとは、次を満たす二つのアンビエントイソトピー $^\exists h = \{h_u : D_1^2 \times D_2^2 \to D_1^2 \times D_2^2\}_{u \in I}, {}^\exists \underline{h} = \{\underline{h_u} : D_2^2 \to D_2^2\}_{u \in I}$ が存在することである。

(i) $h_1(S) = S'$

(ii) $h_u|_{D_1^2 \times \partial D_1^2} = id, (\underline{h_u}|_{\partial D_1^2} = id)$

(iii) 次の図式が可換である。

$$\begin{tikzcd} D_1^2 \times D_2^2 \arrow[r, "h_u"] \arrow[d, "pr_2"] & D_1^2 \times D_2^2 \arrow[d, "pr_2"] \\ D_2^2 \arrow[r, "\underline{h_u}"] & D_2^2 \end{tikzcd}$$

(W2) S と S' が弱同値 *(equivalent in the weak sense)* であるとは、次を満たす二つのアンビエントイソトピー $^\exists h = \{h_u : D_1^2 \times D_2^2 \to D_1^2 \times D_2^2\}_{u \in I}, {}^\exists \underline{h} = \{\underline{h_u} : D_2^2 \to D_2^2\}_{u \in I}$ が存在することである。

(i) $h_1(S) = S'$

(ii) $h_u|_{D_1^2 \times \{q\}} = id, (\underline{h_u}(q) = q)$

(iii) 次の図式が可換である。

$$\begin{tikzcd} D_1^2 \times D_2^2 \arrow[r, "h_u"] \arrow[d, "pr_2"] & D_1^2 \times D_2^2 \arrow[d, "pr_2"] \\ D_2^2 \arrow[r, "\underline{h_u}"] & D_2^2 \end{tikzcd}$$

(S2)' S と S' が *(S2)'* 関係であるとは、次を満たすイソトピー $^\exists f = \{f_u : S \to D_1^2 \times D_2^2\}_{u \in I}$ とアンビエントイソトピー $^\exists \underline{h} = \{\underline{h_u} : D_2^2 \to D_2^2\}_{u \in I}$ が存在することである。

(i) $f_0 = id, f_1(S) = S'$

(ii) $f_u|_{S \cap (D_1^2 \times \partial D_1^2)} = id, (\underline{h_u}|_{\partial D_1^2} = id)$

(iii) 次の図式が可換である。

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f_u"] \arrow[d, "pr_2"] & D_1^2 \times D_2^2 \arrow[d, "pr_2"] \\ D_2^2 \arrow[r, "\underline{h_u}"] & D_2^2 \end{tikzcd}$$

(W2)' S と S' が *(W2)'* 関係であるとは、次を満たすイソトピー $^\exists f = \{f_u : S \to D_1^2 \times D_2^2\}_{u\in I}$ とアンビエントイソトピー $^\exists \underline{h} = \{\underline{h_u} : D_2^2 \to D_2^2\}_{u\in I}$ が存在することである。

(i) $f_0 = id, f_1(S) = S'$

(ii) $f_u|_{S\cap(D_1^2\times\{q\})} = id, (\underline{h_u}(q) = q)$

(iii) 次の図式が可換である。

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f_u} & D_1^2 \times D_2^2 \\ \downarrow{\scriptstyle pr_2} & & \downarrow{\scriptstyle pr_2} \\ D_2^2 & \xrightarrow{\underline{h_u}} & D_2^2 \end{array}$$

(S3) S と S' が強ブレイドアンビエントイソトピック *(braid ambient isotopic in the strong sense)* であるとは、次を満たすアンビエントイソトピー $^\exists h = \{h_u : D_1^2\times D_2^2 \to D_1^2\times D_2^2\}_{u\in I}$ が存在することである。

(i) $h_1(S) = S'$

(ii) $h_u|_{D_1^2\times\partial D_1^2} = id$

(iii) $h_u(S) \subset D_1^2 \times D_2^2$ は *Braided Surface*

(W3) S と S' が弱ブレイドアンビエントイソトピック *(braid ambient isotopic in the weak sense)* であるとは、次を満たすアンビエントイソトピー $^\exists h = \{h_u : D_1^2\times D_2^2 \to D_1^2\times D_2^2\}_{u\in I}$ が存在することである。

(i) $h_1(S) = S'$

(ii) $h_u|_{D_1^2\times\{q\}} = id$

(iii) $h_u(S) \subset D_1^2 \times D_2^2$ は *Braided Surface*

(S3)' S と S' が *(S3)'* 関係または強ブレイドイソトピック *(braid isotopic in the strong sense)* であるとは、次を満たすイソトピー $^\exists f = \{f_u : S \to D_1^2 \times D_2^2\}_{u\in I}$ が存在することである。

(i) $f_0 = id, f_1(S) = S'$

(ii) $f_u|_{S\cap(D_1^2\times\partial D_1^2)} = id$

(iii) $f_u(S) \subset D_1^2 \times D_2^2$ は *Braided Surface*

(W3)' S と S' が *(W3)'* 関係または弱ブレイドイソトピック *(braid isotopic in the weak sense)* であるとは、次を満たすイソトピー $^\exists f = \{f_u : S \to D_1^2 \times D_2^2\}_{u\in I}$ が存在することである。

(i) $f_0 = id, f_1(S) = S'$

(ii) $f_u|_{S\cap(D_1^2\times\{q\})} = id$

(iii) $f_u(S) \subset D_1^2 \times D_2^2$ は *Braided Surface*

$\square$

注意 3. *[1]* で問題として残されていたのは、*(S3)* と *(S3)'* および *(W3)* と *(W3)'* の強弱である。実際、次の関係は容易にわかる。

$$
\begin{tikzcd}
(S1) \arrow[rr, Rightarrow, "\not\Leftarrow"] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow, "\not\Uparrow"] & & (S2) \arrow[rr, Rightarrow, "\not\Leftarrow"] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow, "\not\Uparrow"] & & (S3) \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow, "\not\Uparrow"] & \\
& (S1)' \arrow[rr, Rightarrow, "\not\Leftarrow"] \arrow[dd, Rightarrow, "\not\Uparrow"] & & (S2)' \arrow[rr, Rightarrow, "\not\Leftarrow"] \arrow[dd, Rightarrow, "\not\Uparrow"] & & (S3)' \arrow[dd, Rightarrow, "\not\Uparrow"] \\
(W1) \arrow[rr, Rightarrow, "\not\Leftarrow"] \arrow[dr, Rightarrow] & & (W2) \arrow[rr, Rightarrow, "\not\Leftarrow"] \arrow[dr, Rightarrow] & & (W3) \arrow[dr, Rightarrow] & \\
& (W1)' \arrow[rr, Rightarrow, "\not\Leftarrow"] & & (W2)' \arrow[rr, Rightarrow, "\not\Leftarrow"] & & (W3)'
\end{tikzcd}
$$

(S1) 関係は分岐値を保つが、*(S2)* 関係では保たない。よって *(S1)* $\not\Leftarrow$ *(S2)* がわかる。
(S2) 関係は分岐タイプを保つが、*(S3)* 関係では保たない。よって *(S2)* $\not\Leftarrow$ *(S3)* がわかる。
(S1) 関係は境界を固定するが、*(W1)* 関係では固定しない。よって *(S1)* $\not\Leftarrow$ *(W1)* がわかる。
他も同様である。□

これから示すことは、次の定理である。

定理 4. *l=1,2,3* に対し、*(Sl)* $\iff$ *(Sl)'* , *(Wl)* $\iff$ *(Wl)'* □

2　アンビエントイソトピーとベクトル場

定理 4 を示すためにはイソトピーを適切な形に拡張すればよいのだが、求められているアンビエントイソトピーには条件が付くため、「イソトピー拡張定理により従う」というように簡単に済ますことはできない。そこで、微分トポロジーにおけるイソトピー拡張の基本的な技法を用いる。以下、M, N は滑らかな境界付き多様体とする。

定義 5. M を多様体、$p : TM \to M$ を M 上の接ベクトル束とする。
M 上の時間に依存するベクトル場とは、滑らかな写像 $X : M \times I \to TM$ であって、次の図式を可換にするものである。

$$\begin{tikzcd} & TM \arrow[d, "p"] \\ M \times I \arrow[ur, "X"] \arrow[r, "pr_1"'] & M \end{tikzcd}$$

M 上の時間に依存するベクトル場 X が、境界で接するとは、X の ∂M 上への制限が ∂M 上の時間に依存するベクトル場となることである。□

定義 6. アンビエントイソトピー $h = \{h_u : M \to M\}_{u \in I}$ に対し、h に同伴する、時間に依存するベクトル場とは、$X_h = \{\frac{\partial h_u}{\partial u} \circ {h_u}^{-1}\}_{u \in I} : M \times I \to TM$ のことである。□

このように、アンビエントイソトピーには同伴する時間に依存するベクトル場が存在する。これは明らかに境界で接する。逆に、(多様体がコンパクトであれば) 境界で接する時間に依存するベクトル場に対して、それを同伴させるアンビエントイソトピーが一意的に存在する。この結果は常微分方程式の解の存在と一意性の簡単な応用である。厳密には次が成り立つ。(証明は [2])

定理 7. *M を (コンパクトとは限らない) 多様体、$X : M \times I \to TM$ を境界で接する M 上の時間に依存するベクトル場とする。X がコンパクト台を持つならば、アンビエントイソトピー ${}^{\exists!}h = \{h_u : M \to M\}_{u \in I}$ が一意的に存在し、X は h に同伴する時間に依存するベクトル場である。*
とくに、M がコンパクトならば、境界で接する時間に依存するベクトル場に対して、このような h はいつでも存在する。□

イソトピーに対しては「貼り合わせる」「拡張する」といった操作が非常に難しい。しかし、ベクトル場に直してしまえばそれも容易になる。そのため、欲しいアンビエントイソトピーがあった場合には、必要な条件をベクトル場の言葉に直すことによって構成が容易になることも多い。

3 定理４の証明のための準備

補題 8. アンビエントイソトピー $h=\{h_u:M\to M\}_{u\in I}$ に対して、
$h_u = id(^\forall u\in I) \iff X_h = 0$

証明. $\Rightarrow$ は明らか。$\Leftarrow$ は定理７の h の一意性（常微分方程式の解の一意性）により従う。 □

補題 9. アンビエントイソトピー $h=\{h_u:M\to M\}_{u\in I}, \underline{h}=\{\underline{h_u}:N\to N\}_{u\in I}$ および滑らかな写像 $f:M\to N$ に対して、次は同値である。

(i) 次の図式が可換である。

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "h_u"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[d, "f"] \\ N \arrow[r, "\underline{h_u}"] & N \end{tikzcd}$$

(ii) 次の図式が可換である。

$$\begin{tikzcd} M\times I \arrow[r, "X_h"] \arrow[d, "f\times id_I"] & TM \arrow[d, "df"] \\ N\times I \arrow[r, "X_{\underline{h}}"] & TN \end{tikzcd}$$

証明. $\underline{(i)\Rightarrow(ii)}$
$^\forall q\in M$ をとって固定する。
そこで、$a(u)\overset{\text{def}}{=}h_u(q), b(u)\overset{\text{def}}{=}\underline{h_u}(f(q))$ によって $a:I\to M, b:I\to N$ を定義する。
(i) より $f\circ a=b$
よって、$(df\circ X_h)(h_u(q),u)=df(\frac{da}{du}(u))=\frac{d(f\circ a)}{du}(u)=\frac{db}{du}(u)$
$\quad = X_{\underline{h}}((\underline{h_u}\circ f)(q),u)=X_{\underline{h}}((f\circ h_u)(q),u)$
h_u は全単射で $q\in M$ は任意だったから、$df\circ X_h = X_{\underline{h}}\circ(f\times id_I)$
$\underline{(ii)\Rightarrow(i)}$
$^\forall q\in M, {}^\forall u_0\in I$ をとって固定する。
そこで、$a(u)\overset{\text{def}}{=}h_u(q), b(u)\overset{\text{def}}{=}(\underline{h_u}\circ\underline{h_{u_0}}^{-1}\circ f\circ h_{u_0})(q))$ によって $a:I\to M, b:I\to N$ を定義する。
$\frac{d(f\circ a)}{du}(u_0)=df(\frac{da}{du}(u_0))=(df\circ X_h)(h_{u_0}(q),u_0)=X_{\underline{h}}((f\circ h_{u_0})(q),u_0)=\frac{\partial \underline{h}}{\partial u}((\underline{h_{u_0}}^{-1}\circ f\circ h_{u_0})(q),u))|_{u=u_0}=\frac{db}{du}(u_0)$
さらに、$(f\circ a)(u_0)=f(h_{u_0}(q))=b(u_0)$
よって、常微分方程式の解の一意性より、$f\circ a=b$
とくに $u=0$ の時、$f(q)=(\underline{h_{u_0}}^{-1}\circ f\circ h_{u_0})(q))$
$q\in M, u_0\in I$ は任意だったから、$f\circ h_u=\underline{h_u}\circ f$ □

4　定理４の証明

定理 10 (定理４). *l=1,2,3 に対し、(Sl) $\iff$ (Sl)', (Wl) $\iff$ (Wl)'*

証明. イソトピー $^\exists f = \{f_u : S \to D_1^2 \times D_2^2\}_{u \in I}$ が存在して、$f_0 = id, f_1(S) = S'$ を満たし、すべての $u \in I$ に対して $Im(f_u)$ が Braded Surface であるとする。f を拡張して h を作りたい。

まず、

$\hat{f} : S \times I \to D_1^2 \times D_2^2 \times I; (\hat{x}, u) \mapsto (f_u(\hat{x}), u)$

$\hat{S} \overset{\mathrm{def}}{=} Im(\hat{f}) \subset D_1^2 \times D_2^2 \times I$

$X \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial u} \circ \hat{f}^{-1} = \xi^1 X^1 + \xi^2 X^2 + \mu^1 Y^1 + \mu^2 Y^2 : \hat{S} \to T(D_1^2 \times D_2^2)$

と表す。ただし、$\{X^1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, X^2 = \frac{\partial}{\partial x^2}\}, \{Y^1 = \frac{\partial}{\partial y^1}, Y^2 = \frac{\partial}{\partial y^2}\}$ はそれぞれ D_1^2, D_2^2 上の標準座標から定まる基底ベクトル場である。

これを $D_1^2 \times D_2^2 \times I$ 上に拡張したいのだが、X^1, X^2, Y^1, Y^2 は既に $D_1^2 \times D_2^2$ 上のベクトル場である。よって、関数 $\xi^1, \xi^2, \mu^1, \mu^2$ を拡張することを考えればよい。

$\hat{S} \subset Int(D_1^2) \times D_2^2 \times I$ は properly に埋め込まれているので、管状近傍 $U' \subset Int(D_1^2) \times D_2^2 \times I$ をとることができる。すると、標準的な射影 $U' \to \hat{S}$ を合成することによって、$\hat{S}$ 上の関数を U' 上に拡張することができる。ここから (Sl) $\iff$ (Sl)' を示すのは難しくないが、(Wl) の (ii) の条件を満たすようには同じ方法では拡張できそうにない。なぜなら、この標準的な射影は D_2^2 上のファイバーを保存するとは限らないからである。そこで、このアイデアを D_2^2 の境界付近に限定して、管状近傍を具体的に次のように取る。

$\hat{S}$ の特異値の集合を $\Sigma \subset D_2^2 \times I$ とする。Σ はコンパクトであり、$\Sigma \cap (\partial D_2^2 \times I) = \emptyset$ である。よって、$(\delta \overset{\mathrm{def}}{=}) \frac{1}{2} d_{\mathbb{E}^3}(\Sigma, \partial D_2^2 \times I) > 0$ となることがわかる。(ただし、$d_{\mathbb{E}^n}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の標準的なユークリッド距離関数とする。) $E \overset{\mathrm{def}}{=} \{(x, u) \in D_2^2 \times I \mid d_{\mathbb{E}^2}(x, \partial D_2^2) \leq \delta\}, \hat{E} \overset{\mathrm{def}}{=} \hat{S} \cap (D_1^2 \times E)$ とすると、$E, \hat{E}$ はコンパクトであり、$pr_2|_{\hat{E}} \hat{E} \to E$ は有限被覆写像である。$h : E \to \mathbb{R}_{>0}$ を $h(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \min\{d_{\mathbb{E}^5}(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \hat{E}; \alpha \neq \beta, pr_2(\alpha) = pr_2(\beta) = x\}$ によって定義すれば、h は連続である。[1] そこで、$\epsilon_1 \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{3} \min h(E)$ とすれば、$\epsilon_1 > 0$ である。また、$\hat{E} \cap (\partial D_1^2 \times E) = \emptyset$ より、$(\epsilon_2 \overset{\mathrm{def}}{=}) \frac{1}{2} d_{\mathbb{E}^5}(\hat{E}, \partial D_1^2 \times E) > 0$ である。$\epsilon \overset{\mathrm{def}}{=} \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ とする。このとき、$\tau : int(\hat{E}) \times Int(D^2) \to Int(D_1^2) \times D_2^2 \times I$ を $\tau((\hat{x}, u), v) \overset{\mathrm{def}}{=} (\hat{x} + (\epsilon v, 0), u)$ によって定義すれば、τ は開埋め込みである。そこで、$U \overset{\mathrm{def}}{=} Im(\tau)$ とすれば、U は $int(\hat{E})$ の管状近傍であり、標準的な射影 $p : U \to \hat{S}$ は $int(E) \subset D_2^2 \times I$ 上のファイバーを保存する。すなわち、次の図式が可換である。

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "p"] \arrow[d, "pr_2"] & \hat{S} \arrow[d, "pr_2"] \\ D_2^2 \times I \arrow[r, equal] & D_2^2 \times I \end{tikzcd}$$

これで、境界付近の拡張の準備はできた。

---

[1] これはたとえば次のように示すことができる。$pr_2|_{\hat{E}}$ が有限被覆であることから、$pr_2|_{\hat{E}}$ の引き戻しは局所的には有限個の切断 $\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_n$ で尽くすことができる。このとき、各 $i, j = 1, \cdots\cdots, n$ に対して、閉集合 $\{x \in \hat{E} \mid d_{\mathbb{E}^5}(\alpha_i(x), \alpha_j(x)) \leq d_{\mathbb{E}^5}(\alpha_k(x), \alpha_l(x)) (^\forall (k, l) \neq (i, j))\}$ 上で h は $h(x) = d_{\mathbb{E}^5}(\alpha_i(x), \alpha_j(x))$ と書け、これは連続である。よって、張り合わせ補題により h は E 上で連続である。

また、$\hat{S} \cap (Int(D_1^2) \times Int(D_2^2) \times I) \subset Int(D_1^2) \times Int(D_2^2) \times I$ は閉埋め込みだから、$^{\exists}V \subset Int(D_1^2) \times Int(D_2^2) \times I$: 開集合が存在して、関数 $\xi^1, \xi^2, \mu^1, \mu^2$ は V 上に拡張可能である。最後に $W \stackrel{\text{def}}{=} D_1^2 \times D_2^2 \times I - \hat{S}$ とすれば、$\{U, V, W\}$ は $D_1^2 \times D_2^2 \times I$ の開被覆である。そこで、$\{U, V, W\}$ に従属する 1 の分割 $\{\phi_U, \phi_V, \phi_W\}$ をとる。

l=3 の場合

$\xi^1, \xi^2, \mu^1, \mu^2$ の拡張 $\hat{\xi^1}, \hat{\xi^2}, \hat{\mu^1}, \hat{\mu^2}$ を次のように定義する。

まず、p を合成することによって、$\xi^1, \xi^2, \mu^1, \mu^2$ の U 上への拡張 $\xi_U^1, \xi_U^2, \mu_U^1, \mu_U^2$ がとれる。

また、V の定義により $\xi^1, \xi^2, \mu^1, \mu^2$ の V 上への拡張 $\xi_V^1, \xi_V^2, \mu_V^1, \mu_V^2$ がとれる。

そこで、$\hat{\xi^1} \stackrel{\text{def}}{=} \phi_U \xi_U^1 + \phi_V \xi_V^1, \hat{\xi^2} \stackrel{\text{def}}{=} \phi_U \xi_U^2 + \phi_V \xi_V^2, \hat{\mu^1} \stackrel{\text{def}}{=} \phi_U \mu_U^1 + \phi_V \mu_V^1, \hat{\mu^2} \stackrel{\text{def}}{=} \phi_U \mu_U^2 + \phi_V \mu_V^2$ とする。これによって、X の拡張 $\hat{X} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\xi^1} X^1 + \hat{\xi^2} X^2 + \hat{\mu^1} Y^1 + \hat{\mu^2} Y^2 : D_1^2 \times D_2^2 \times I \to T(D_1^2 \times D_2^2)$ が定義できる。これが求めるものであることを示す。

まず、$^{\forall}\hat{x} \in \partial(D_1^2 \times D_2^2), ^{\forall}u \in I$ に対し、$(\hat{x}, u) \in U$ ならば $p(\hat{x}, u) \in \hat{S} \cap (D_1^2 \times (\partial D_2^2) \times I)$ より $\hat{X}(\hat{x}, u) = \xi^1(p(\hat{x}, u))X^1 + \xi^2(p(\hat{x}, u))X^2 + \mu^1(p(\hat{x}, u))Y^1 + \mu^2(p(\hat{x}, u))Y^2 \in T_{pr_1(\hat{x})}D_1^2 \oplus T_{pr_2(\hat{x})}(\partial D_2^2) = T_{\hat{x}}(\partial(D_1^2 \times D_2^2))$ である。$(\hat{x}, u) \notin U$ の時も $\hat{X}(\hat{x}, u) = 0 \in T_{\hat{x}}(\partial(D_1^2 \times D_2^2))$ であるから、$\hat{X}$ は境界で接することが確かめられた。よって、ある f の拡張であるアンビエントイソトピー $^{\exists!}h = \{h_u : D_1^2 \times D_2^2 \to D_1^2 \times D_2^2\}_{u \in I}$ が一意的に存在して、$\hat{X}$ は h に同伴する時間に依存するベクトル場である。

あとは。h が (S3),(W3) の (i),(ii),(iii) を満たすことを確かめればよいが、(i),(iii) は明らかである。

(S3)' を仮定し、$^{\forall}\hat{x} \in D_1^2 \times \partial D_2^2, ^{\forall}u \in I$ をとる。$(\hat{x}, u) \in U$ ならば $p(\hat{x}, u) \in \hat{S} \cap (D_1^2 \times (\partial D_2^2) \times I)$ より $\hat{X}(\hat{x}, u) = \xi^1(p(\hat{x}, u))X^1 + \xi^2(p(\hat{x}, u))X^2 + \mu^1(p(\hat{x}, u))Y^1 + \mu^2(p(\hat{x}, u))Y^2 = 0(\because\ X(p(\hat{x}, u)) = 0)$ である。$(\hat{x}, u) \notin U$ の時も $\hat{X}(\hat{x}, u) = 0$ である。すなわち $\hat{X}|_{D_1^2 \times \partial D_2^2 \times I} = 0$ なので、補題 8 より $h_u|_{D_1^2 \times \partial D_2^2} = id$ である。

(W3)' を仮定し、$^{\forall}\hat{x} \in D_1^2 \times \{q\}, ^{\forall}u \in I$ をとる。$(\hat{x}, u) \in U$ ならば $p(\hat{x}, u) \in \hat{S} \cap (D_1^2 \times \{q\} \times I)$ より $\hat{X}(\hat{x}, u) = \xi^1(p(\hat{x}, u))X^1 + \xi^2(p(\hat{x}, u))X^2 + \mu^1(p(\hat{x}, u))Y^1 + \mu^2(p(\hat{x}, u))Y^2 = 0(\because\ X(p(\hat{x}, u)) = 0)$ である。$(\hat{x}, u) \notin U$ の時も $\hat{X}(\hat{x}, u) = 0$ である。すなわち $\hat{X}|_{D_1^2 \times \{q\} \times I} = 0$ なので、補題 8 より $h_u|_{D_1^2 \times \{q\}} = id$ である。

l=2 の場合

イソトピー f に加えて、次の図式を可換にするアンビエントイソトピー $^{\exists}\underline{h} = \{\underline{h_u} : D_2^2 \to D_2^2\}_{u \in I}$ が存在する。

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "f_u"] \arrow[d, "pr_2"] & D_1^2 \times D_2^2 \arrow[d, "pr_2"] \\
D_2^2 \arrow[r, "\underline{h_u}"] & D_2^2
\end{tikzcd}
$$

補題 9 の証明と同様に、上の図式の可換性から次の図式が可換であることがわかる。

$$
\begin{tikzcd}
\hat{S} \arrow[r, "X"] \arrow[d, "pr_2 \times id_I"] & T(D_1^2 \times D_2^2) \arrow[d, "d(pr_2)"] \\
D_2^2 \times I \arrow[r, "X_{\underline{h}}"] & TD_2^2
\end{tikzcd}
$$

よって、、$X_{\underline{h}} = \mu^1 Y^1 + \mu^2 Y^2$ である。すなわち、μ^1, μ^2 は $D_2^2 \times I$ 上の関数とみなせる。さらにこれは、自然に $D_1^2 \times D_2^2 \times I$ 上の関数とみなせる。
いま、$d(pr_2)(X^1) = d(pr_2)(X^2) = 0$ より、ξ^1, ξ^2 をどのように拡張しても、X の拡張 $\hat{X}$ について次の図式は可換になることに注意しておく。

$$\begin{tikzcd}
D_1^2 \times D_2^2 \times I \arrow[r, "\hat{X}"] \arrow[d, "pr_2 \times id_I"] & T(D_1^2 \times D_2^2) \arrow[d, "d(pr_2)"] \\
D_2^2 \times I \arrow[r, "X_{\underline{h}}"] & TD_2^2
\end{tikzcd}$$

このとき、$\hat{X}$ を同伴させるアンビエントイソトピー $h = \{h_u : D_1^2 \times D_2^2 \to D_1^2 \times D_2^2\}_{u \in I}$ に対して、補題 9 より次の図式が可換である。

$$\begin{tikzcd}
D_1^2 \times D_2^2 \arrow[r, "h_u"] \arrow[d, "pr_2"] & D_1^2 \times D_2^2 \arrow[d, "pr_2"] \\
D_2^2 \arrow[r, "\underline{h_u}"] & D_2^2
\end{tikzcd}$$

そこで、ξ^1, ξ^2 を<u>l=3 の場合</u>と全く同様に拡張すれば、条件を満たす拡張 $\hat{X}$ がとれる。
<u>l=1 の場合</u>
<u>l=2 の場合</u>で、$\underline{h_u} = id$ とすればよい。 $\square$

参考文献

[1] Seiichi Kamada, "Braid and Knot Theory in Dimension Four," Mathematical Surveys and Monographs Volume: 95; 2002

[2] M. W. ハーシュ [著] and 松本堯生 [訳], "微分トポロジー," シュプリンガー数学クラシックス 第 25 巻