h-principle

山崎晃司

東京工業大学　D1

2019 年 8 月 10 日～12 日

自己紹介

山崎晃司 / 東京工業大学 / D1 / 遠藤久顕 研究室
専門：トポロジー
　　└微分トポロジー・低次元トポロジー
　　　　└ Engel 多様体
ホームページ：`http://chocolate.crispypuffs.tk/`

Engel 多様体とは？

$\longrightarrow$ 完全不可積分な 2 次元分布（Engel 構造）を備えた 4 次元多様体

定理 (Mitsumatsu, Y.)

There exists an Engel manifold with trivial automorphism group.

Introduction

次の微分不等式の解を見つけたい

$$f(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial^r y}{\partial x^r}) > 0 \cdots ①$$

h-principle の基本戦略

- 微分不等式の "形式解" を見つける。
- 任意の "形式解" が厳密解へとホモトピーで変形できることを示す。

$$f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial^r y}{\partial x^r}\right) > 0 \cdots ①$$

定義 1

微分不等式 ① の形式解とは、$r+1$ 個の連続な写像の組 $(s(x), s^1(x), s^2(x), \cdots, s^r(x))$ で、次を満たすものである。

$$f(x, s(x), s^1(x), s^2(x), \cdots, s^r(x)) > 0$$

定義 2

微分不等式がホモトピー原理 *(h-principle)* を満たすとは、任意の形式解 $\bar{s}$ に対し形式解のホモトピー $\bar{s}_t$ であって、次を満たすものが存在する。

- $\bar{s}_0 = \bar{s}$
- $\bar{s}_1$ は厳密解

次のようなテクニックで示される。

- 特異点除去 $\cdots$ Gromov, Eliashberg
- 層理論的技法 $\cdots$ Smale, Hirsch
- 凸積分 $\cdots$ Nash, Kuiper

応用

定理 3 (Cone eversion)

$f : \mathbb{R}^2 - 0 \to \mathbb{R}$ を $f(x) = |x|$ によって定める。この時、$\mathbb{R}^2 - 0$ 上の連続な関数族 f_t で、次を満たすものが存在する。

- $f_0 = f, f_1 = -f$
- 各 t に対して $grad(f_t) \neq 0$

gif : `https://jonathanevans27.wordpress.com/2014/10/12/cone-eversion/`

定理 4 (Sphere eversion)

$S^2 \subset \mathbb{R}^3$ は、はめ込み族のホモトピーで裏返すことができる。

gif : `http://www.treeincarnation.com/sphere_eversion.htm`

応用 2

定理 5 (岡-Grauert の原理 (に関連する話題))

複素多様体と正則写像の圏は、あるモデル圏の中に次を満たすように埋め込める。

- 正則写像 f が弱同値 $\Leftrightarrow$ f がホモトピー同値
- 複素多様体 X が *fibrant*$\Leftrightarrow$ X が岡多様体
- 複素多様体 X が *cofibrant*$\Leftrightarrow$ X が *Stein* 多様体

定理 6 (Nash の埋め込み定理)

任意のリーマン多様体は、標準的内積を備えた十分次元の高いユークリッド空間へ等長的に埋め込める。

Jet 束

$U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ を開集合、$f : U \to V$ を十分滑らかな写像とし、点 $p \in U$ をとる。f の p における r 階までのテイラー多項式を

$$P_p^r f(\boldsymbol{x}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=0}^{r} \frac{1}{i!} D_p^i f(\boldsymbol{x} - p)^{\otimes i} \in (\mathbb{R}[\boldsymbol{x}])^m$$

と定める。

定義 7

$$j_p^r f(\boldsymbol{x}) = [P_p^r f(\boldsymbol{x})] \in (\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]/(r+1\text{ 次単項式}))^m$$

を f の点 p における *r-ジェット*と呼ぶ。

$$J^r(U, V) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \coprod_{p \in U} \{ j_p^r f \mid f : U \to V \text{ は滑らかな写像} \}$$

を（アフィン）*r-ジェット空間*という。

命題 8 (Faà di Bruno の公式)

$U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^k$ を開集合、$f : U \to V$, $g : V \to W$ を滑らかな写像とする。この時、各点 $p \in U$ に対して $j^r_p(g \circ f) = j^r_{f(p)} g \circ j^r_p f$ である。

$\longrightarrow$ これにより、$J^r(U, V)$ を貼り合わせて多様体 M, N のジェット空間 $J^r(M, N)$ や、ファイバー束 $\pi : E \to B$ の切断のジェット空間（ジェット束）$J^r(\pi)$ が定まる。

ファイバー束 $\pi : E \to B$ の滑らかな切断 $s : B \to E$ に対し、$j^r s(p) \overset{\text{def}}{=} j^r_p s$ として切断 $j^r s : B \to J^r(\pi)$ が定まる。これを s の持ち上げという。

偏微分関係

定義 9

滑らかなファイバー束 $f : E \to B$ 上の r 階の偏微分関係 *(partial differential relation)* とは、r-ジェット束 $J^r(f) \to B$ の部分束 $R \subset J^r(f)$ のことである。r 階の偏微分関係 R が開（*resp.* 閉）であるとは、$R \subset J^r(f)$ が部分集合として開（*resp.* 閉）であることをいう。
滑らかな切断 $s : B \to E$ が偏微分関係 R の解 *(solution)* であるとは、$Im(j^r s) \subset R$ を満たすことである。

$f : E \to B$ を滑らかなファイバー束、$R \subset J^r(f)$ を r 階の偏微分関係とする。各開集合 $U \subset B$ に対し、$Sol(U; R) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{s : U \to E | s$ は R の解 $\}$,
$\Gamma(U; R) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{s : U \to R | s$ は $R \to B$ の U 上の連続な切断 $\}$ とする。
$Sol(-; R)$, $\Gamma(-; R)$ は B 上の層である。

偏微分関係の h-principle

定義 10

r 階の偏微分関係 $R \subset J^r(f)$ がホモトピー原理 *(h-principle)* を満たすとは、“$\pi_0(Sol(B; R)) \to \pi_0(\Gamma(B; R))$ が全射”となることである。

R がパラメトリック・ホモトピー原理 *(parametric h-principle)* を満たすとは、“$Sol(B; R) \subset \Gamma(B; R)$ が弱ホモトピー同値”となることである。

“$\pi_0(Sol(B; R)) \to \pi_0(\Gamma(B; R))$ が全射” とは、$R \to B$ の任意の連続な切断 $t : B \to R$ に対し、R の解 $s : B \to E$ が存在し、s と t は R 上でホモトピックとなることである。

問 11

$Sol(B; R)$, $\Gamma(B; R)$ に適切な位相を入れて、
“$\pi_0(Sol(B; R)) \to \pi_0(\Gamma(B; R))$ が全射” を正当化できるか？

擬位相空間

定義 12

擬位相空間 $\mathcal{Q}$ とは、関手 $\mathcal{Q} : \mathbf{Top}^{op} \to \mathbf{Set}$ で、次の貼り合わせ条件を満たすものである。

- 任意の位相空間 A および任意の有限閉被覆 $\{F_i \subset A\}$ に対し、次の図式は差核である。

$$\mathcal{Q}(A) \to \prod \mathcal{Q}(F_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{Q}(F_i \cap F_j)$$

例 13

$\mathcal{Q}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : A \to Sol(B; R) \mid A \times B \to R; (a, p) \mapsto j^r_p(f(a))$ が連続 $\}$

例 14

$\mathcal{Q}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : A \to \Gamma(B; R) \mid A \times B \to R; (a, p) \mapsto f(a)(p)$ が連続 $\}$

$A \mapsto Hom(-, A)$ によって位相空間の圏は擬位相空間の圏に埋め込まれる。米田の補題により、これは充満忠実であり、さらに $Hom(Hom(-, A), \mathcal{Q}) \cong \mathcal{Q}(A)$ である。
すなわち、$\mathcal{Q}(A)$ の各元は “擬連続写像” $A \to \mathcal{Q}$ と同一視できる。とくに、これらは有限閉被覆について “貼り合わせ補題” が成り立つ。

$\longrightarrow$ 擬位相空間の圏でもホモトピー論を展開することができる。

その他、次が成り立つ。

定理 15

擬位相空間の圏は完備かつ余完備なデカルト閉圏である。また、フィルター余極限と有限極限が交換し、*IPC* 性質 *(inductive-limit-product commutation property)* を満たす。

$\longrightarrow$ 擬位相空間の圏に値を持つ任意の前層は層化を持つ。

層の h-principle

B を位相空間、$\mathcal{F}$ を擬位相空間の圏に値を持つ B 上の層とする。B 上の前層 $\mathcal{F}^\square$ を $\mathcal{F}^\square(U) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{F}(U)^U$ によって定める。$\mathcal{F}^\square$ の層化を $\mathcal{F}^*$ と書く。このとき、自然な射 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^*$ が存在する。

定義 16

$\mathcal{F}$ が**ホモトピー原理** *(h-principle)* **を満たす**とは、任意の開集合 $U \subset B$ に対して $\pi_0(\mathcal{F}(U)) \to \pi_0(\mathcal{F}^*(U))$ が全射となることである。

$\mathcal{F}$ が**パラメトリック・ホモトピー原理** *(parametric h-principle)* **を満たす**とは、$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^*(U)$ が弱ホモトピー同値となることである。

偏微分関係と層の h-principle

$f : E \to B$ を滑らかなファイバー束、$R \subset J^r(f)$ を r 階の偏微分関係とする。

定理 17

次の図式を可換にする τ が存在する。

$$\begin{tikzcd} Sol(-;R)^* \arrow[r, "\tau"] & \Gamma(-;R) \\ Sol(-;R) \arrow[u] \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

さらに R は *open* とすると、任意の開集合 $^\forall U \subset B$ に対し、$\tau_U : Sol(U;R)^* \to \Gamma(U;R)$ は弱ホモトピー同値である。

偏微分関係と層の h-principle

系 18

R は $open$ とする。
層 $Sol(-;R)$ がホモトピー原理を満たすための必要十分条件は、R が任意の開集合 $U \subset B$ 上でホモトピー原理を満たすことである。
層 $Sol(-;R)$ がパラメトリック・ホモトピー原理を満たすための必要十分条件は、R が任意の開集合 $U \subset B$ 上でパラメトリック・ホモトピー原理を満たすことである。

flexible な層

定義 19

B を位相空間、$\mathcal{F}$ を擬位相空間の圏に値を持つ B 上の層または前層とする。
$\mathcal{F}$ が *flexible* であるとは、任意の二つのコンパクト部分集合 ${}^\forall K \subset {}^\forall L \subset B$ に対し、制限写像 $\mathcal{F}(L) \to \mathcal{F}(K)$ が *Serre* ファイブレーションになることである。

$f : X \to Y$ が Serre ファイブレーション (Serre fibration) であるとは、任意の n 次元円盤 D^n と次のような四角形の可換図式に対し、斜めに横断する射 γ が存在し、図式を全て可換にすることである。ただし、$I = [0,1]$ は単位閉区間とする。

$$\begin{tikzcd} D^n \times \{0\} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\ D^n \times I \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dotted, "{}^\exists\gamma"] & Y \end{tikzcd}$$

定義 20

B を位相空間、$\mathcal{F}$ を擬位相空間の圏に値を持つ B 上の層とする。
部分集合 $B_0 \subset B$ に対し、$\mathcal{F}$ の B_0 上の変形 *(deformation)* とは、有限単体複体 P と射 $h : P \times I \to \mathcal{F}(B_0)$ の組 $h = (h, P)$ のことである。
開集合 $U \subset B$ およびコンパクト集合 $K \subset U$ に対し、$\mathcal{F}$ の U 上の変形 $h : P \times I \to \mathcal{F}(U)$ が K-圧縮可能 *(K-compressible)* であるとは、次を満たす $^\exists \tilde{h} : P \times I \to \mathcal{F}(U)$ が存在することである。*(*この $\tilde{h}$ を h の K-圧縮 *(K-compression)* と呼ぶ。*)*

- $h|_{P\times\{0\}} = \tilde{h}|_{P\times\{0\}}$
- 次の二つの合成は一致する。

$$P \times I \underset{\tilde{h}}{\overset{h}{\rightrightarrows}} \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(K)$$

次スライドへ続く $\longrightarrow$

圧縮可能性による特徴づけ

定義 20 (続き)

- K を含む開集合 $^{\exists}U_0 \Subset U$(i.e. $cl(U_0) \subset U$) が存在して、次の合成は $t \in I$ によらない。

$$P \times I \xrightarrow{\tilde{h}} \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U - cl(U_0))$$

命題 21

B を局所コンパクトな正規空間、$\mathcal{F}$ を擬位相空間の圏に値を持つ B 上の層とする。
$\mathcal{F}$ が *flexible* であるための必要十分条件は、任意の開集合 $^{\forall}U \subset B$ および任意のコンパクト集合 $^{\forall}K \subset U$ に対し、$\mathcal{F}$ の U 上の任意の変形が K-圧縮可能であることである。

flexible な層の基本定理

定理 22

B を局所有限な単体複体（*e.g.* 多様体）、$\mathcal{F}$ を擬位相空間の圏に値を持つ B 上の層とする。

1. $\mathcal{F}^*$ は *flexible* である。
2. $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^*$ が導くすべての茎の間の射 $\mathcal{F}_x \to \mathcal{F}^*_x (x \in B)$ はホモトピー同値である。

定理 23

B を σ-コンパクトかつ局所有限な有限次元単体複体（*e.g.* 多様体）、$\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ を B 上の *flexible* な層とする。この時、射 $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ について以下は同値である。

1. 任意の開集合 ${}^{\forall}U \subset B$ に対し、$f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ は弱ホモトピー同値である。
2. 任意の点 $x \in B$ に対し、$f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ は弱ホモトピー同値である。

系 24

B を σ-コンパクトかつ局所有限な有限次元単体複体（*e.g.* 多様体）、$\mathcal{F}$ を擬位相空間の圏に値を持つ B 上の層とする。
$\mathcal{F}$ が flexible ならば、$\mathcal{F}$ はパラメトリック・ホモトピー原理を満たす。

$\longrightarrow$ $\mathcal{F}$ が flexible であることを示すには？

- イソトピーの sharp な作用 $\Rightarrow$ 多様体が open の場合
  (e.g. Cone eversion)
- micro 拡張定理 $\Rightarrow$ 多様体が closed の場合 (open の場合に帰着)
  (e.g. Sphere eversion)

系 24

B を σ-コンパクトかつ局所有限な有限次元単体複体（*e.g.* 多様体）、$\mathcal{F}$ を擬位相空間の圏に値を持つ B 上の層とする。
$\mathcal{F}$ が flexible ならば、$\mathcal{F}$ はパラメトリック・ホモトピー原理を満たす。

$\longrightarrow$ $\mathcal{F}$ が flexible であることを示すには？

- イソトピーの sharp な作用 $\Rightarrow$ 多様体が open の場合
  (e.g. Cone eversion)
- micro 拡張定理 $\Rightarrow$ 多様体が closed の場合 (open の場合に帰着)
  (e.g. Sphere eversion)

応用

$f : E \to B$ を滑らかなファイバー束、$R \subset J^r(f)$ を r 階の偏微分関係とする。
$\mathit{Diff}(B)$ を B の局所的な自己微分同型からなる亜群とし、$\mathit{Diff}(f)$ を E の局所的な自己微分同型で f のファイバーを保つものからなる亜群とする。
$\mathit{Diff}(f)$ は $J^r(f)$ に作用し、（連続な）全射準同型 $\mathit{Diff}(f) \to \mathit{Diff}(B)$ が存在する。
$\mathit{Diff}(f) \to \mathit{Diff}(B)$ が（連続な）切断を持つと仮定する (e.g. 接束、自明束) と、$\mathit{Diff}(B)$ は $J^r(f)$ に作用する。
この作用が R を保つとき、R は *Diff*-不変であるという。

定理 25

$f : E \to B$ を滑らかなファイバー束、$R \subset J^r(f)$ を r 階の偏微分関係とする。R が *open* かつ *Diff*-不変で B が *open* ならば、R はパラメトリック・ホモトピー原理を満たす。（層 $\mathit{Sol}(-; R)$ が *flexible* であるとは限らない。）

例 26

M, N を滑らかな多様体とする。

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \{(p, f(p), df_p) \in J^1(M, N) | df_p \text{はフルランク} \}$$

とすると、R は open かつ $Diff$-不変な 1 階の偏微分関係である。
M が open であれば、R はパラメトリック・ホモトピー原理を満たす。

定理 3 (Cone eversion)

$f : \mathbb{R}^2 - 0 \to \mathbb{R}$ を $f(x) = |x|$ によって定める。この時、$\mathbb{R}^2 - 0$ 上の連続な関数族 f_t で、次を満たすものが存在する。

- $f_0 = f, f_1 = -f$
- 各 t に対して $grad(f_t) \neq 0$

証明

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \{(p, f(p), df_p) \in J^1(\mathbb{R}^2 - 0, \mathbb{R}) | df_p \neq 0\}$$

とすると、R はパラメトリック・ホモトピー原理を満たす。よって、$\mathbb{R}^2 - 0 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}; p \mapsto (f_t(p), g_t(p), h_t(p))$ なる連続な関数族で、次を満たすものを見つければよい。

- $f_0 = f, g_0 = \partial_x f, h_0 = \partial_y f; f_1 = -f, , g_1 = -\partial_x f, h_1 = -\partial_y f$
- 各 p, t に対して $(g_t(p), h_t(p)) \neq 0$

これは、例えば次のようにとれる。

$$\begin{aligned} f_t &\stackrel{\text{def}}{=} (1-2t)f \\ \begin{pmatrix} g_t \\ h_t \end{pmatrix} &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \cos(\pi t) & -\sin(\pi t) \\ \sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□