h-principle を広めたい

山崎晃司

東京工業大学　D1

2019 年 8 月 10 日～12 日

h-principle とは？

次の微分不等式の解を見つけたい

$$f(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial^r y}{\partial x^r}) > 0 \cdots ①$$

h-principle の基本戦略

- 微分不等式の “形式解” を見つける。
- 任意の “形式解” が厳密解へとホモトピーで変形できることを示す。

h-principle とは？

$$f(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial^r y}{\partial x^r}) > 0 \cdots ①$$

定義 1

微分不等式 ① の形式解とは、$r+1$ 個の連続な写像の組 $(s(x), s^1(x), s^2(x), \cdots, s^r(x))$ で、次を満たすものである。

$$f(x, s(x), s^1(x), s^2(x), \cdots, s^r(x)) > 0$$

h-principle とは？

定義 2

微分不等式がホモトピー原理 *(h-principle)* を満たすとは、任意の形式解 $\bar{s}$ に対し形式解のホモトピー $\bar{s}_t$ であって、次を満たすものが存在する。

- $\bar{s}_0 = \bar{s}$
- $\bar{s}_1$ は厳密解

次のようなテクニックで示される。

- 特異点除去 $\cdots$ Gromov, Eliashberg
- 層理論的技法 $\cdots$ Smale, Hirsch
- 凸積分 $\cdots$ Nash, Kuiper

応用

定理 3 (Cone eversion)

$f : \mathbb{R}^2 - 0 \to \mathbb{R}$ を $f(x) = |x|$ によって定める。この時、$\mathbb{R}^2 - 0$ 上の連続な関数族 f_t で、次を満たすものが存在する。

- $f_0 = f, f_1 = -f$
- 各 t に対して $grad(f_t) \neq 0$

gif：https://jonathanevans27.wordpress.com/2014/10/12/cone-eversion/

定理 4 (Sphere eversion)

$S^2 \subset \mathbb{R}^3$ は、はめ込み族のホモトピーで裏返すことができる。

gif：http://www.treeincarnation.com/sphere_eversion.htm

応用

定理 5 (岡-Grauert の原理 (に関連する話題))

複素多様体と正則写像の圏は、あるモデル圏の中に次を満たすように埋め込める。

- 正則写像 f が弱同値 $\Leftrightarrow$ f がホモトピー同値
- 複素多様体 X が *fibrant*$\Leftrightarrow$ X が岡多様体
- 複素多様体 X が *cofibrant*$\Leftrightarrow$ X が *Stein* 多様体

定理 6 (Nash の埋め込み定理)

任意のリーマン多様体は、標準的内積を備えた十分次元の高いユークリッド空間へ等長的に埋め込める。