

ホモトピー原理の圏論的構造

Koji Yamazaki

Kanazawa University

Feb 15, 2023

今日の内容

- 山崎の web ページ (未完成)

<http://mathchocola.starfree.jp/study/h-principle.pdf>

- 1 導入
 - h-principle とは？

- 2 今後の展望

h-principle とは？

次の微分不等式を考える。

$$f(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^r y}{\partial x^r}) > 0 \dots \textcircled{1}$$

微分不等式の解を次の 2 ステップで見つける。

- ① 微分不等式の “形式的解” を見つける。
- ② “形式的解” をホモトピーによって厳密解へ変形する。

定義 0.1

微分不等式 ① の **形式的解 (formal solution)** とは、 $r + 1$ 個の連続な写像の組 $(s(x), s^1(x), s^2(x), \dots, s^r(x))$ で、次を満たすものである。

$$f(x, s(x), s^1(x), s^2(x), \dots, s^r(x)) > 0$$

h-principle とは？

定義 0.2

微分不等式がパラメトリック・ホモトピー原理 (parametric h-principle) を満たすとは、形式的解の空間と厳密解の空間が弱ホモトピー同値となることである。

h-principle の例

はめ込み

定理 0.3 (Hirsh, Smale)

M と N は多様体で、 $\dim(M) < \dim(N)$ を満たすとする。このとき、はめ込み $M \hookrightarrow N$ はパラメトリック・ホモトピー原理を満たす。

系 0.4 (Sphere eversion; Smale)

$\mathbb{R}^3$ 内の標準的な二次元球面は、折り曲げることなく (すなわち、はめ込みのホモトピーによって) 裏返すことができる。

沈め込み

定理 0.5 (Phillips)

M と N は多様体で、 M は開 (任意の連結成分が閉でない) とする。このとき、沈め込み $M \rightarrow N$ はパラメトリック・ホモトピー原理を満たす。

R を多様体 B 上の開偏微分関係 (e.g. 偏微分不等式) とする。

定理 (Gromov)

B が開多様体、 R が開偏微分関係で、 R が擬群 $\text{Diff}(B)$ の作用で不変であったとする。

このとき、 R はパラメトリック・ホモトピー原理を満たす。

はめ込みのホモトピー原理を得るには微小拡張手品 (Microextension trick) が必要。

その他、Nash の埋め込み定理や岡の原理とも関係がある。

Gromov h-principle 証明の第一の鍵は以下の定理
(今回はこれを **Gromov の基本定理 1** と呼ぶことにする。)

定理 (Gromov の基本定理 1)

擬位相空間に値を持つ多面体上の層は、**可撓 (flexible)** ならばパラメトリック・ホモトピー原理を満たす。

- **擬位相空間**とは単体的集合に似た対象で、ホモトピー群が定義できる。(今回はこれの代わりに**コンデンス集合**を使う。)
- 偏微分関係 R の厳密解の層 $\text{Sol}(-; R)$ はコンデンス集合に値を持つと見なせる。
- コンデンス集合に値を持つ層を**連続層 (continuous sheaf)** と呼ぶ。

コンデンス集合

コンパクト Hausdorff 空間の圏を **CH** と書く.
CH は以下によって景の構造を持つ.

$$\{X_i \rightarrow X\}_{i \in I} \text{が被覆} \Leftrightarrow I \text{は有限} \& \coprod X_i \rightarrow X \text{は全射}$$

定義 0.6

景 **CH** 上の層をコンデンス集合と呼ぶ.

定義 0.7

位相空間を X とする.

任意のコンパクト Hausdorff 空間 A に対し, 連続写像 $A \rightarrow X$ の集合を $\overline{X}(A)$ と書く.

$\overline{X}$ はコンデンス集合である.

層理論のホモトピー原理

定義 0.8

連続層 $\mathcal{F}$ がパラメトリック・ホモトピー原理を満たすとは、 $\Delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ が sectionwise に弱ホモトピー同値（すなわち、すべての $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}^*(U)$ が弱ホモトピー同値）となることである。

- $\mathcal{F}^* : \mathcal{F}$ の形式的切断の層
- $\Delta : \text{対角射}$

定義 0.9

位相空間 B 上の連続層 $\mathcal{F}$ が可撓 (flexible) であるとは、任意のコンパクト集合の組 $K \subset L \subset B$ に対し、制限射 $\mathcal{F}(L) \rightarrow \mathcal{F}(K)$ が Serre 束になることである。

(ただし、 $\mathcal{F}(K) = \varinjlim_{U \supset K} \mathcal{F}(U)$)

Gromov h-principle 証明の概略

証明にはさらに、微小可撓 (micro flexible) 層に関する以下の定理が必要になる。

定理 (Gromov の基本定理 2)

B を多面体、 $A \subset B$ は余次元 1 以上の部分多面体とする。 B 上の連続層 $\mathcal{F}$ に対し、 $\mathcal{F}$ が微小可撓ならば、 $\mathcal{F}$ の A への制限 $\mathcal{F}|_A$ は可撓である。

R を開偏微分関係とすると、厳密解の層 $\text{Sol}(-; R)$ は微小可撓層である。 B が開多様体ならば、ある余次元 1 以上のスケルトン A に対し、 A にくらでも近い近傍と B は微分同相である。

R が Diff_B -不変な偏微分関係ならば、上記の微分同相は R を保つ。この性質により、 $\text{Sol}(B; R) \subset \Gamma(B; R)$ が弱ホモトピー同値になることを示すことができる。

□

Gromov 理論の基本補題

底空間 B は多面体とする。

Gromov の基本定理 1 は次の二つの性質から直ちに従う。

補題 (局所補題)

- ① $\mathcal{F}^*$ は flexible である。
- ② $\Delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ は stalkwise に弱ホモトピー同値（すなわち、すべての $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^*$ が弱ホモトピー同値）である。

補題 (準同型定理)

$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ が flexible で、 $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が stalkwise に弱ホモトピー同値ならば、 f は sectionwise に弱ホモトピー同値である。

実は、局所補題によって $\Delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ を **fibrant 置換** として解釈できる。

① 導入

② 今後の展望

- Gromov h-principle の圏化
- 全体像
- Haefliger h-principle
- 岡-Grauert の原理
- Whitney 位相と Baire 空間
- Nash の埋め込み定理
- 特異点論への応用

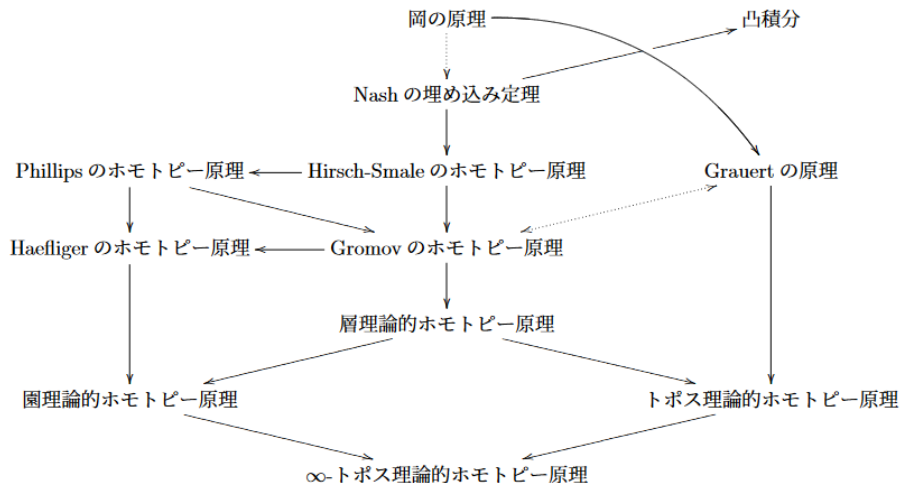
Gromov h-principle の圏化

Gromov のホモトピー原理は, Hirsch-Smale のホモトピー原理 (はめ込み) や Phillips のホモトピー原理 (沈め込み) を含む.

一方, Haefliger のホモトピー原理 (葉層構造) や “岡-Grauert の原理” (Stein 多様体論) は, Gromov 理論からはみ出している.

これらを統一するためには, 層理論的ホモトピー原理の圏化が必要である.

具体的な目標は, 園 (stack) やトポスの理論を用いて Gromov の議論を一般化することである.



Haefliger h-principle

M を多様体, $\mathcal{F} \subset TM$ は corank が q である可積分分布とする.
(すなわち, $\mathcal{F}$ は葉層構造を定める.)

このとき, 局所的には沈め込み $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ が存在し, $\mathcal{F}$ は f の微分の核 $\text{Ker}(df)$ と書ける.

もし, 任意の可積分分布を沈め込み $M \rightarrow \mathbb{R}^q$ の微分の核として実現するような多様体 Γ^q が存在すれば, Phillips の h-principle より, 可積分分布の h-principle が得られるはずである.

Γ^q は多様体としては存在しないが, $\mathbb{R}^q$ 上の微分同相写像の芽が定める Lie 亜群を Γ^q と置けばよい.

実際, Haefliger による次の結果が知られている.

定理 (Haefliger)

M は開多様体とする. ある位相空間 $B\Gamma^q$ およびベクトル束 $N\Gamma^q \rightarrow B\Gamma^q$ に対し, 次のクラスの間には一対一の対応がある.

- ① 可積分分布のホモトピー類.
- ② ベクトル束の射 $TM \rightarrow N\Gamma^q$ で, 各ファイバー上で全射になるもののホモトピー類.

$B\Gamma^q$ および $N\Gamma^q$ は, それぞれ Lie 亜群 Γ^q およびその接束 $T\Gamma^q$ の幾何学的実現である.

この定理は, 沈め込み $M \rightarrow \Gamma^q$ の空間から形式的沈め込みの空間への包含写像が, 弧状連結成分の集合 π_0 の間に全単射を導くことを意味している.

複素多様体 X 上の、至る所で 0 をとらない正則関数の層を $\mathcal{O}_X^*$ と書く。
同様に、 X 上の、至る所で 0 をとらない連続関数の層を $\mathcal{C}_X^*$ と書く。

定理 (岡)

X を Stein 多様体とすると、 $H^1(X; \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^1(X; \mathcal{C}_X^*)$ は同型である。

Grauert の原理

層 $\mathcal{O}_X^*$ は $\mathbb{C}^*(\cong GL_1(\mathbb{C}))$ に値を持つ正則写像の層と見なせる。
層 $\mathcal{C}_X^*$ は $\mathbb{C}^*(\cong GL_1(\mathbb{C}))$ に値を持つ連続写像の層と見なせる。
岡の定理は次のように言い換えることもできる。

定理 (岡)

X を *Stein* 多様体とすると、 X 上の任意の C^0 -概複素直線束に対し、それと同型な正則複素直線束が正則同型を除いてただ一つ存在する。

Grauert は一般の $GL_n(\mathbb{C})$ について示した。

定理 (Grauert)

X を *Stein* 多様体とすると、 X 上の任意の C^0 -概複素ベクトル束に対し、それと同型な正則複素ベクトル束が正則同型を除いてただ一つ存在する。

Stein 多様体と岡多様体

複素多様体 X と Y の間の正則写像 $X \rightarrow Y$ 全体の集合を $\mathcal{O}(X, Y)$ と書き、連続写像 $X \rightarrow Y$ 全体の集合を $\mathcal{C}(X, Y)$ と書く。

Stein 多様体については次の性質が知られている。

定理

X を Stein 多様体とし、 Y を岡多様体とする。 $\mathcal{O}(X, Y) \subset \mathcal{C}(X, Y)$ は弱ホモトピー同値である。

複素 Lie 群は対象空間が一点集合である複素 Lie 亜群と見なせる。

複素 Lie 群 $GL_n(\mathbb{C})$ を複素 Lie 亜群と見做すと、Grauert の定理は

“ $\pi_0(\mathcal{O}(X, GL_n(\mathbb{C}))) \rightarrow \pi_0(\mathcal{C}(X, GL_n(\mathbb{C})))$ が全単射” であることを主張していると考えられる。

トポスとしての複素多様体

Y を岡多様体としたとき、複素多様体 X 上の層 $\mathcal{O}(-, Y)$ は層理論的ホモトピー原理を満たさない。

そこで、**Stein 開集合のみを “開集合” とする**ことで、層 $\mathcal{O}(-, Y)$ は層理論的ホモトピー原理を満たすようにしたい。

この開集合系は通常の意味での位相を定めないが、代数幾何学でしばしば使われる **G-位相**の定義を満たす。

これはグロタンディーク位相の一種であるが、トポスとしては元の位相と一致する。

弱可撓層と完備性

Studer によって定義された弱可撓層は，可撓層の一般化である．

定理 1.1 (Studer)

複素多様体 X 上の弱可撓層 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ は完備距離空間に値を持つとする．射 $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が *stalkwise* に弱ホモトピー同値ならば， $f_X : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$ は弱ホモトピー同値である．

問題

コンデンス集合上の “一様構造” および “完備性” は定義できるか？

定義 1.2

前コンパクト空間とは、一様空間であって、その完備化がコンパクトである空間のことである。

一様空間の間の写像が **Cauchy 連続**であるとは、任意の Cauchy 有向点列を Cauchy 有向点列に移すことを言う。

前コンパクト Hausdorff 空間と Cauchy 連続写像の圏上の層の圏を **Cauchy** と書くことにする。

Cauchy の対象は、コンデンス集合の上に “Cauchy 列” の情報を加えたものと見做せる。

(稠密, 閉) 分解

定義 1.3

圏 **Cauchy** 上の射が弱固有であるとは、任意の前コンパクト Hausdorff 空間 A とその完備化 $A \rightarrow B$ に対し右リフト性質を持つものとする。

圏 **Cauchy** 上の射が稠密であるとは、任意の弱固有射に対し左リフト性質を持つものとする。

弱固有射は、任意のコンパクト集合の引き戻しが完備になるイメージである。

予想 1

任意の連続写像 f は分解 $f = p \circ i$ を持ち、 i は稠密、 p は弱固有であるようにできる。

$X \rightarrow \mathbf{1}$ の分解 $X \rightarrow Y \rightarrow \mathbf{1}$ を取った時、
 $X \rightarrow Y$ を X の完備化として定義できる。

Whitney 位相と Baire 空間

定理 1.4 (Gromov)

B が多様体、 R が開偏微分関係で、 R が擬群 $\text{Diff}(B)$ の作用で不変であったとする。 A は B に埋め込まれた多面体で、余次元 1 以上とする。

R の厳密解の層の A への引き戻しは可撓層である。

特に、これはパラメトリック・ホモトピー原理を満たす。

定理 1.5 (Holonomic 近似定理 (Eliashberg, Mishachev))

B が多様体、 R が開偏微分関係であったとする。 A は B に埋め込まれた多面体で、余次元 1 以上とする。

R の厳密解の A 周りの芽の空間は、形式解の芽の空間の中で、Whitney 位相について稠密である。

特に、 R が擬群 $\text{Diff}(B)$ の作用で不変ならば、これはパラメトリック・ホモトピー原理を満たす。

M と N は多様体とする.

C^r -級埋め込み $M \hookrightarrow N$ の空間を $\text{Emb}^r(M, N)$ とし,

C^r -級固有写像 $M \rightarrow N$ の空間を $\text{Prop}^r(M, N)$ とする.

前層 $\text{Emb}^r(-, N)$ は M 上の層にならない. しかし, 以下は成り立つ.

定理 1.6

$\dim(N) \geq 2 \dim(M) + 1$ ならば, $\text{Emb}^r(M, N)$ は $\text{Prop}^r(M, N)$ の中で Whitney 位相について稠密な開集合である.

これは Baire の性質と相性が良い.

定義 1.7

位相空間の部分集合が**残留的**であるとは、それが高々可算個の稠密開集合の交わりとして表せることを言う.

Baire 空間とは、任意の残留的部分集合が稠密である位相空間のことである.

定理 1.8

$C^r(M, N)$ に *Whitney* 位相を入れたものは *Baire* 空間である.

→ $C^r(M, N)$ の中で、残留的な条件は可算個同時に近似できる.

問題

Cauchy またはコンデンス集合の圏 **Cond** 上で “残留的部分空間” や “Baire 空間” を定義できるか？ また, “Baire の範疇定理” が成り立つか？

定理 1.9 (Baire の範疇定理)

- ① 任意の完備距離化可能空間は *Baire* 空間である.
- ② 任意の局所コンパクト *Hausdorff* 空間は *Baire* 空間である.

距離空間も局所コンパクト *Hausdorff* 空間も, どちらもコンパクト生成である.

これはコンデンス集合とは相性が良い.

Nash の埋め込み定理

定理 (Nash)

任意のリーマン多様体は十分次元の高いユークリッド空間へ等長的に埋め込める.

命題 1.10

リーマン多様体の間の写像 f について以下は同値である.

- ① f は等長はめ込みである.
- ② f は任意の曲線の長さを保つ.

任意の距離空間に対して “等長はめ込み” が定義できる.

予想 2

十分いい性質を持つ距離空間に対し, Nash の埋め込み定理が成り立つ.

特異点論への応用

特異点論では、写像空間の“点”のみならず、ホモトピー変形に対しても“良い”性質を要求する。

→ 連続層の代わりに単体的層を用いる。

M と N を多様体とし、 M 上の単体的層 $\mathcal{F}$ を次のように定める。

$$\mathcal{F}(U)_n = \{f : \Delta^n \times U \rightarrow N \mid t \in S^r \Rightarrow \text{cod}_{\mathcal{A}_e}((f_t)_x) \leq r(\forall x)\}$$

ただし、 S^r は Δ^n の r 次スケルトンとする。

予想 3

$\mathcal{F}$ は (適切な意味で) 可撓層である。