

ホモトピー原理と圏論

山崎 晃司 金沢大学

2023 年 2 月 12 日

目次

1 日目	導入とグロタンディーク位相の基礎	5
1.1	導入	5
1.1.1	ホモトピー原理とは？	5
1.1.2	ホモトピー原理の具体例	6
1.1.3	岡の原理と Grauert の定理	7
1.1.4	Gromov のホモトピー原理	7
1.1.5	層理論的ホモトピー原理	8
1.2	景と層	10
1.2.1	coverage と景	10
1.2.2	景上の層	11
2 日目	モデル圏と condensed set	17
2.1	モデル圏	17
2.1.1	単体的集合	17
2.1.2	モデル圏	18
2.1.3	余束生成モデル圏	21
2.2	condensed set	28
2.2.1	Stone 空間	28
2.2.2	condensed set	30
3 日目	連続層	39
3.1	連続層と可撓層	39
3.1.1	連続層	39
3.1.2	モデル構造	42
3.2	ABC fibration 構造	45
3.2.1	形式的切断の層	45
3.2.2	ABC 前束構造	51
4 日目	弱可撓層と応用	55
4.1	弱可撓層	55
4.2	応用	60

1 日目 導入とグロタンディーク位相の基礎

1.1 導入

1.1.1 ホモトピー原理とは？

次の偏微分不等式 R を考える．

$$f(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^r y}{\partial x^r}) > 0 \quad \dots \quad R$$

偏微分方程式でもよいのだが，実用上，偏微分不等式を考えることが多いため，これに倣う．目標は偏微分不等式の解を見つけることである．そこで，問題を次の 2 ステップに分ける．

1. 偏微分不等式の“形式的解”を見つける．
2. “形式的解”をホモトピーによって厳密解へ変形する．

“形式的解”の詳細な定義には Jet 束を必要とするため，こちらは後回しにするとして，ここでは次のように考えてよいものとする．

定義 1.1.1. 偏微分不等式 R の形式的解 (*formal solution*) とは， $r + 1$ 個の連続な写像の組 $(s(x), s^1(x), s^2(x), \dots, s^r(x))$ で，次を満たすものである．

$$f(x, s(x), s^1(x), s^2(x), \dots, s^r(x)) > 0$$

この定義は非常に弱いものであるため，形式的解は多くの場合すぐに見つかる．そのため，形式的解が厳密解へと変形可能かどうかの問題になる．

定義 1.1.2. 偏微分不等式 R がホモトピー原理 (*h-principle*) を満たすとは，任意の形式的解がホモトピーによって厳密解へと変形可能であることを言う．偏微分不等式 R がパラメトリック・ホモトピー原理 (*parametric h-principle*) を満たすとは，形式的解の空間が厳密解の空間と弱ホモトピー同値であることを言う．

ホモトピー原理を満たすことが解の存在に対応するとすれば，パラメトリック・ホモトピー原理を満たすことは解の (条件に対する) 一意性までも要求することに対応する．これは非常に強い条件であるが，Gromov は，実用性の高い一般的な条件の下でこの性質を示した．

1.1.2 ホモトピー原理の具体例

Hirsch-Smale のホモトピー原理

M, N を多様体とする. 形式的はめ込み $M \rightarrow N$ とは, 連続写像 $f : M \rightarrow N$ と, f 上の連続なベクトル束の射 $\tilde{f} : TM \rightarrow TN$ の組 $(f, \tilde{f})$ であって, 各点 $x \in M$ ごとに $\tilde{f} : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ が単射となるもののことを言う. はめ込み $M \looparrowright N$ 全体の集合を $\text{Imm}(M, N)$ と書き, 形式的はめ込み $M \rightarrow N$ 全体の集合を $\text{Imm}^f(M, N)$ と書く.

定理 1.1.3 (Hirsch-Smale のホモトピー原理 (Hirsch [9], Smale [21, 20])). M, N を多様体とする. $\dim(M) < \dim(N)$ ならば, はめ込み $M \looparrowright N$ はパラメトリック・ホモトピー原理を満たす. すなわち, $\text{Imm}(M, N) \subset \text{Imm}^f(M, N)$ は弱ホモトピー同値である.

系 1.1.4 (Sphere eversion (Smale [21])). $\mathbb{R}^3$ 内の標準的な二次元球面は, 折り曲げることなく (すなわち, はめ込みのホモトピーによって) 裏返すことができる.

Phillips のホモトピー原理

M, N を多様体とする. 形式的沈め込み $M \rightarrow N$ とは, 連続写像 $f : M \rightarrow N$ と, f 上の連続なベクトル束の射 $\tilde{f} : TM \rightarrow TN$ の組 $(f, \tilde{f})$ であって, 各点 $x \in M$ ごとに $\tilde{f} : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ が全射となるもののことを言う. 沈め込み $M \rightarrow N$ 全体の集合を $\text{Sub}(M, N)$ と書き, 形式的沈め込み $M \rightarrow N$ 全体の集合を $\text{Sub}^f(M, N)$ と書く.

定理 1.1.5 (Phillips のホモトピー原理 (Phillips [17])). M, N を多様体とする. M が開ならば, 沈め込み $M \rightarrow N$ はパラメトリック・ホモトピー原理を満たす. すなわち, $\text{Sub}(M, N) \subset \text{Sub}^f(M, N)$ は弱ホモトピー同値である.

Eliashberg のホモトピー原理

Nash のホモトピー原理

Nash は任意のリーマン多様体が十分次元の高いユークリッド空間の中へ等長的に埋め込めることを示した. Nash の定理はまず C^1 -級において示され, 後に任意の C^r -級でも成り立つように拡張された. C^1 -級の埋め込みの発見には, 次の主張が肝になっている.

定理 1.1.6 (Nash [14]). M をリーマン多様体とする. $\dim(M) < n$ ならば, C^1 -等長はめ込み $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ はパラメトリック・ホモトピー原理を満たす. すなわち, C^1 -等長はめ込みの空間は形式的等長はめ込みの空間と弱ホモトピー同値である.

奇妙に思われるかもしれないが, C^1 -等長はめ込みは曲率を保たないため, このような可撓性を持つ. 一方, $r \geq 2$ の時はもちろん, C^r -級等長はめ込みはより窮屈である. C^r -級埋め込みの発見には, 現在では凸積分 (convex integration) と呼ばれる技法が使われる.

定理 1.1.7 (Nash [15]). C^r -等長はめ込みはホモトピー原理を満たす. すなわち, 任意の形式的等長はめ込みはホモトピーによって C^r -等長はめ込みへと変形可能である.

1.1.3 岡の原理と Grauert の定理

複素多様体 X 上の, 至る所で 0 をとらない正則関数の層を $\mathcal{O}_X^*$ と書く. 同様に, X 上の, 至る所で 0 をとらない連続関数の層を $\mathcal{C}_X^*$ と書く. 層の包含 $\mathcal{O}_X^* \subset \mathcal{C}_X^*$ は層係数コホモロジーの間の射 $H^*(X; \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^*(X; \mathcal{C}_X^*)$ を導く. 岡の原理は次の形で与えられる.

定理 1.1.8 (岡の原理 [16]). X を *Stein* 多様体とすると, $H^1(X; \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^1(X; \mathcal{C}_X^*)$ は同型である.

層 $\mathcal{O}_X^*$ は $\mathbb{C}^*(\cong GL_1(\mathbb{C}))$ に値を持つ正則写像の層と見なせる. 同様に, 層 $\mathcal{C}_X^*$ は $\mathbb{C}^*(\cong GL_1(\mathbb{C}))$ に値を持つ連続写像の層と見なせる. よって, $H^1(X; \mathcal{O}_X^*)$ は X 上の正則複素直線束の正則同型類に一致し, $H^1(X; \mathcal{C}_X^*)$ は X 上の C^0 -概複素直線束の連続同型類に一致する. すなわち, 上記の定理は次のように言い換えることもできる.

系 1.1.9. X を *Stein* 多様体とすると, X 上の任意の C^0 -概複素直線束に対し, それと同型な正則複素直線束が正則同型を除いてただ一つ存在する.

$GL_1(\mathbb{C})$ はアーベル群であるため, これらの定理の証明には層係数コホモロジーの豊富な技術が使える. 一方, 一般の $GL_n(\mathbb{C})$ は非可換群である. Grauert は一般の $GL_n(\mathbb{C})$ でも同様の主張がなおも成り立つことを示した.

定理 1.1.10 (Grauert [6]). X を *Stein* 多様体とすると, X 上の任意の C^0 -概複素ベクトル束に対し, それと同型な正則複素ベクトル束が正則同型を除いてただ一つ存在する.

1.1.4 Gromov のホモトピー原理

$f: E \rightarrow B$ を滑らかなファイバー束, $s: B \rightarrow E$ を滑らかな切断とする. この時, r -ジェット束 $J^r(f) \rightarrow B$ の切断 $j^r s: B \rightarrow J^r(f)$ が, $j^r s(p) = j_p^r s$ によって定まる. このような $j^r s$ を s の延長と呼ぶ.

定義 1.1.11. 滑らかなファイバー束 $f: E \rightarrow B$ 上の r 階の偏微分関係 (*partial differential relation*) とは, r -ジェット束 $J^r(f) \rightarrow B$ の部分束 $R \subset J^r(f)$ のことである. r 階の偏微分関係 R が開 (*resp.* 閉) であるとは, $R \subset J^r(f)$ が部分集合として開 (*resp.* 閉) であることをいう.

滑らかな切断 $s: B \rightarrow E$ が偏微分関係 R の解 (*solution*) であるとは, $\text{Im}(j^r s) \subset R$ を満たすことである. $R \rightarrow B$ の連続な切断のことを偏微分関係 R の形式的解 (*formal solution*) と呼ぶ.

$f: E \rightarrow B$ を滑らかなファイバー束, $R \subset J^r(f)$ を r 階の偏微分関係とする.

$$\begin{aligned} \text{Sol}(B; R) &= \{s: B \rightarrow E \mid s \text{ は } R \text{ の解の延長}\} \\ \Gamma(B; R) &= \{s: B \rightarrow E \mid s \text{ は } R \rightarrow B \text{ の連続な切断}\} \end{aligned}$$

とする.

定義 1.1.12. 偏微分関係 $R \subset J^r(f)$ がホモトピー原理 (*h-principle*) を満たすとは、任意の形式的解がホモトピーによって厳密解へと変形可能であることを言う。 (i.e. $\pi_0(\text{Sol}(B; R)) \rightarrow \pi_0(\Gamma(B; R))$ が全射となること。) 偏微分関係 R がパラメトリック・ホモトピー原理 (*parametric h-principle*) を満たすとは、 $\text{Sol}(B; R) \subset \Gamma(B; R)$ が弱ホモトピー同値となることを言う。

B を滑らかな多様体とする。 各開集合 $U, V \subset B$ に対し、

$$\text{Diff}_B(U, V) = \{ \text{微分同相写像 } U \rightarrow V \}$$

と置くと、 Diff_B は群の構造を持つ。 このような Diff_B は擬群の一種である。

$p: E \rightarrow B$ を滑らかなファイバー束とする。 各開集合 $U, V \subset E$ に対し、

$$\text{Diff}_{E/B}(U, V) = \{ \text{微分同相写像 } \hat{\phi}: U \rightarrow V \mid p \circ \hat{\phi} = \phi \circ p (\exists \phi: p(U) \rightarrow p(V)) \}$$

と置くと、 $\text{Diff}_{E/B}$ は群の構造を持つ。 さらに、 $\hat{\phi} \mapsto \phi$ の対応によって、群の準同型 $\text{Diff}_{E/B} \rightarrow \text{Diff}_B$ が定まる。

定義 1.1.13. ファイバー束 $E \rightarrow B$ が自然であるとは、群の準同型 $\text{Diff}_{E/B} \rightarrow \text{Diff}_B$ が切断 $\text{Diff}_B \rightarrow \text{Diff}_{E/B}$ を持つことを言う。

自然なファイバー束 $E \rightarrow B$ 上の偏微分関係 R が Diff_B -不変 (*Diff_B -invariant*) であるとは、上記の切断 $\text{Diff}_B \rightarrow \text{Diff}_{E/B}$ の像が R を保つことである。

これで Gromov のホモトピー原理を述べる準備が整った。

定理 1.1.14 (Gromov のホモトピー原理 (Gromov [7]; cf. [4, 8])). $p: E \rightarrow B$ を滑らかなファイバー束とする。 R を p 上の開かつ Diff_B -不変な偏微分関係とする。 B が開多様体ならば、 R はパラメトリック・ホモトピー原理を満たす。

Gromov のホモトピー原理が Phillips のホモトピー原理を真に含むことは明らかである。一方、Hirsch-Smale のホモトピー原理は底空間が閉である場合も含むため、これでは不十分である。このギャップは微小拡張手品 (Microextension Trick) (cf. [4, §8.1]) によって埋めることができる。Gromov は層理論的ホモトピー原理を整備する中で、これを微小拡張定理 (Microextension Theorem) (cf. [8, p.85]) という形で定式化した。

1.1.5 層理論的ホモトピー原理

次章以降で説明する層理論的ホモトピー原理について概観する。

まず、ここまで写像空間の間の写像が“弱ホモトピー同値である”といったことを所与の概念として扱ってきたが、これをきちんと定義する必要がある。写像空間を空間として見るには、例えば Whitney 位相を入れるなどの方法があるが、これは細かすぎる。コンパクト開位相を入れてもよいのだが、ここではもっと代数的に扱いやすい構造として、擬

位相空間と呼ばれる構造を入れる．層を扱う上で、フィルター余極限の振る舞いが重要になるのだが、位相空間の圏におけるフィルター余極限は十分に良い性質を持たない．これを解決するのが擬位相空間である．擬位相空間のアイデアは Spanier [22] らによるものを基礎にしている．Gromov [8] はこれを少し変形して用いているが、これもまた困難が残る．本書ではそのどちらとも違うものとして擬位相空間を定義している．擬位相空間の圏はモデル圏の構造を持ち、さらに位相空間の圏と Quillen 同値である．このモデル構造における弱同値として、弱ホモトピー同値を定義する．

擬位相空間の圏を $\mathbf{qTop}$ と書くことにして、 $\mathbf{qTop}$ に値を持つ位相空間 B 上の層を連続層と呼ぶ．連続層の圏を $\mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop})$ と書く．任意の連続層 $\mathcal{F}$ に対し、 $\mathcal{F}$ の形式的切断の層 $\mathcal{F}^*$ と、対角射と呼ばれる標準的な射 $\Delta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ が存在する．

定義 1.1.15. 連続層 $\mathcal{F}$ が (層理論的) ホモトピー原理を満たすとは、任意の開集合 $U \subset B$ に対し、 $\pi_0(\Delta): \pi_0(\mathcal{F}(U)) \rightarrow \pi_0(\mathcal{F}^*(U))$ が全射になることである．連続層 $\mathcal{F}$ が (層理論的) パラメトリック・ホモトピー原理を満たすとは、任意の開集合 $U \subset B$ に対し、 $\Delta_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}^*(U)$ が弱ホモトピー同値になることである．

Gromov の層理論的ホモトピー原理において最も重要な概念は可撓性 (flexibility) および微小可撓性 (microflexibility) である．可撓層とは、連続層の圏におけるある種の fibrant 対象であり、微小可撓層とは可撓層の一般化である．正確な定義は後の章に回すとして、これは次の性質により重要である．

定理 1.1.16. B を強局所可縮、局所コンパクトかつ遺伝的パラコンパクトなハウスドルフ空間とする． B 上の任意の可撓層は層理論的パラメトリック・ホモトピー原理を満たす．

B としては例えば多様体や多面体を採用できる．(他の例としては CAT(0)-空間などもあるかもしれないが、私が詳しくないのであまり触れないことにする．距離空間とは相性が良さそうである．)

これは次の二つの補題により直ちにわかる．

補題 1.1.17 (cf. 補題 3.2.7 と補題 3.2.13). B を強局所可縮な正規ハウスドルフ空間とする．次が成り立つ．

- 任意の連続層 $\mathcal{F}$ に対し、 $\mathcal{F}$ の形式的切断の層 $\mathcal{F}^*$ は可撓である．
- 任意の連続層 $\mathcal{F}$ に対し、対角射 $\Delta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ は *stalkwise* に弱ホモトピー同値である．(i.e. 任意の点 $x \in B$ に対し、茎の間の射 $\Delta_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^*$ が弱ホモトピー同値である．)

補題 1.1.18 (cf. 系 4.1.14). B を局所コンパクトかつ遺伝的パラコンパクトなハウスドルフ空間とする． B 上の可撓層の間の射 $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対し、次は同値である．

1. f は *sectionwise* に弱ホモトピー同値である．
(i.e. 任意の開集合 $U \subset B$ に対し、射 $f_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ は弱同値である．)

2. f は *stalkwise* に弱ホモトピー同値である.

Gromov のホモトピー原理を導くためには、微小可撓性に関する次の定理が必要である.

定理 1.1.19. B を多面体とし、 $A \subset B$ を余次元 1 以上の部分多面体とする. B 上の任意の微小可撓層 $\mathcal{F}$ に対し、 $\mathcal{F}|_A$ は A 上の可撓層である.

Gromov のホモトピー原理の証明のアウトラインを述べる. R を開偏微分関係とすると、厳密解の層 $\text{Sol}(-; R)$ は微小可撓層である. B が開多様体ならば、ある余次元 1 以上のスケルトン A に対し、 A にいくらでも近い近傍と B は微分同相である. R が Diff_B -不変な偏微分関係ならば、上記の微分同相は R を保つ. この性質により、 $\text{Sol}(B; R) \subset \Gamma(B; R)$ が弱ホモトピー同値になることを示すことができる.

1.2 景と層

1.2.1 coverage と景

coverage と景について復習しておく. トポスなどは扱わない. 詳しく知りたい方は [13] などを読むとよいかもしれない.

定義 1.2.1. $\mathcal{U}$ は空でない圏とする. $\mathcal{U}$ 上の *coverage* とは、各 $U \in \text{Ob}(\mathcal{U})$ に対し、射の族からなる集合 $\mathcal{T}_U$ を与える写像であって、次の公理を満たすものである.

1. $\phi \in \mathcal{C} \in \mathcal{T}_U$ ならば、 $\phi: \cdot \rightarrow U$ である. すなわち、各 $\mathcal{C} \in \mathcal{T}_U$ は $\mathcal{C} = \{U_i \rightarrow U\}_i$ の形で書ける.
2. $\phi: V \rightarrow U$ が同型射ならば、 $\{\phi\} \in \mathcal{T}_U$ である.
3. 各族 $\{U_i \rightarrow U\}_i \in \mathcal{T}_U$ および $\mathcal{U}$ 上の各射 $V \rightarrow U$ に対し、族 $\{V_j \rightarrow V\}_j \in \mathcal{T}_V$ および j で添え字付けられた射 $V_j \rightarrow U_i$ の族が存在して次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccc} U_{i(j)} & \longrightarrow & U \\ \uparrow & & \uparrow \\ V_j & \longrightarrow & V. \end{array}$$

4. $\{U_i \rightarrow U\}_i \in \mathcal{T}_U$ かつ $\{U_{ij} \rightarrow U_i\}_j \in \mathcal{T}_{U_i}$ ならば、 $\{U_{ij} \rightarrow U_i \rightarrow U\}_{i,j} \in \mathcal{T}_U$ である.

この時、各 $\mathcal{C} \in \mathcal{T}_U$ を U の被覆 (*covering*) と呼ぶ. *coverage* を備えた圏のことを景 (*site*) と呼ぶ. 公理 3. の被覆 $\{V_j \rightarrow V\}_j$ として $\{U_i \times_U V \rightarrow V\}_i$ がとれるならば、この *coverage* のことを *Grothendieck* 前位相 (*pretopology*) と呼ぶ.

具体的な例を見る.

例 1.2.2 (位相空間). ある位相空間 X の開集合系を X_{top} とすると, これは包含関係を射として圏となる. ここに, 普通の意味での開被覆を被覆として定義すれば coverage が定まり, X_{top} は景となる.

例 1.2.3. ある位相空間 X の閉集合系を X_{cl} とすると, これは包含関係を射として圏となる. ここに, 有限閉被覆を被覆として定義すれば coverage が定まり, X_{cl} は景となる.

また, 次の構成も重要である.

例 1.2.4 (自明な位相). $\mathcal{U}$ は任意の圏とする. 各 $U \in Ob(\mathcal{U})$ に対し, $\mathcal{T}_U = \{\text{同型射} \cdot \rightarrow U\}$ とすると, $\mathcal{U}$ は景となる.

例 1.2.5 (積景). $\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ は景とする. 各 $U \in Ob(\mathcal{U})$ と $V \in Ob(\mathcal{V})$ に対し, $\mathcal{T}_{(U,V)} = \mathcal{T}_U \times \mathcal{T}_V$ とすると, 積圏 $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ は景となる.

例 1.2.6 (スライス景). $\mathcal{U}$ は景とする. 各 $U \in Ob(\mathcal{U})$ に対し, U 上のスライス圏を $\mathcal{U}_U$ とする. すなわち, コンマ圏 $(\mathcal{U}/U)$ を $\mathcal{U}_U$ とする. 各 $V \in Ob(\mathcal{U}_U)$ に対し,

$$\begin{aligned} & \mathcal{U}_U \text{ 上の射の族 } \{V_i \rightarrow V\}_{i \in I} \text{ が } V \text{ の被覆である.} \\ \Leftrightarrow & \{V_i \rightarrow V\}_{i \in I} \text{ は } \mathcal{U} \text{ 上の被覆である.} \end{aligned}$$

とすることにより, $\mathcal{U}_U$ は景となる.

1.2.2 景上の層

定義

まず, 一般に前層を定義する.

定義 1.2.7. $\mathcal{U}$ と $\mathcal{C}$ は圏とする. $\mathcal{C}$ に値を持つ $\mathcal{U}$ 上の前層 (presheaf) とは, 反変関手 $\mathcal{U}^{op} \rightarrow \mathcal{C}$ のことである. 前層の間の射とは自然変換のことである.

$\mathcal{C}$ に値を持つ $\mathcal{U}$ 上の前層の圏を $\mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ と書く. 特に $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ の時, $\mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathbf{Set})$ を単に $\mathbf{PSh}(\mathcal{U})$ と書く. $\mathcal{U}$ が位相空間 X の開集合系 X_{top} の時, $\mathbf{PSh}(X_{top}; \mathcal{C})$ を単に $\mathbf{PSh}(X; \mathcal{C})$ と書く.

次に, 景上の層を定義する.

定義 1.2.8. $\mathcal{U}$ は景とし, $\mathcal{C}$ は小完備な圏とする. $\mathcal{C}$ に値を持つ $\mathcal{U}$ 上の層 (sheaf) とは, $\mathcal{U}$ 上の前層 $\mathcal{F}: \mathcal{U}^{op} \rightarrow \mathcal{C}$ であって, 次の張り合わせ条件を満たすものである.

$\mathcal{U}$ が前位相を備え, $\{U_i \rightarrow U\}_i$ が被覆ならば, 次の図式は差核 (equalizer) である.

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$

$\mathcal{U}$ が coverage を備えた小さい景の場合, 図式を次で置き換える.

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(V)$$

ただし、 V は次の可換図式全てを渡る.

$$\begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & U \\ \uparrow & & \uparrow \\ V & \longrightarrow & U_j \end{array}$$

層の間の射とは自然変換のことである.

$\mathcal{C}$ に値を持つ $\mathcal{U}$ 上の層の圏を $\mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ と書く. 特に $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ の時, $\mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathbf{Set})$ を単に $\mathbf{Sh}(\mathcal{U})$ と書く. $\mathcal{U}$ が位相空間 X の開集合系 X_{top} の時, $\mathbf{Sh}(X_{top}; \mathcal{C})$ を単に $\mathbf{Sh}(X; \mathcal{C})$ と書く.

注意 1.2.9. $\mathcal{U}$ が coverage を備えた大きい景の場合, $\mathcal{C}$ 上に図式を書けるとは限らないが, 層の条件を書き下すことはできる. これにより, 任意の景上の層を定義できる.

例 1.2.10. $\mathcal{U}$ を任意の圏とし, 自明な位相を入れて景とみなす. この時, 景 $\mathcal{U}$ 上の層とは圏 $\mathcal{U}$ 上の前層のことである.

層化

定義 1.2.11. 圏 $\mathcal{C}$ が帰納極限-積交換性質または IPC 性質 (*inductive-limit-product commutation property*) を満たすとは, 任意の余フィルター図式の族 $\{\alpha_s : I_s \rightarrow \mathcal{C}\}_s$ に対し, カノニカルな射 $\varinjlim (\prod I_s \xrightarrow{(i_s) \mapsto \prod \alpha_s(i_s)} \prod \mathcal{C}) \rightarrow \prod (\varinjlim \alpha_s)$ が同型射となることである.

定理 1.2.12. $\mathcal{U}$ は景とし, $\mathcal{C}$ は完備かつ余完備で, フィルター余極限と有限極限が交換し, IPC 性質を満たす圏とする. このとき, 忘却関手 $\mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ は左随伴関手 $\mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ を持つ.

定義 1.2.13. 上記の左随伴関手 $\mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ を層化 (*sheafification*) と呼ぶ.

完備性

まず, 層の図式の前層としての極限は層である.

命題 1.2.14. $\mathcal{F}_i$ を層の圏 $\mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ 上の図式とする. $\mathcal{F}_i$ の前層としての極限 $\varprojlim \mathcal{F}_i$ は層である.

証明. 層の貼り合わせ条件は積と差核によって特徴づけられている. 積と差核は図式の極限であるため, これらは任意の極限と交換する. すなわち, 貼り合わせ条件は極限に対して閉じている. $\square$

これは余極限については成り立たないが, 構成は単純である.

命題 1.2.15. $\mathcal{F}_i$ を層の圏 $\mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ 上の図式とする. $\mathcal{F}_i$ の前層としての余極限 $\varinjlim \mathcal{F}_i$ の層化は層としての余極限である.

証明. 層化関手 $\mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ は包含関手 $\mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathcal{C}) \hookrightarrow \mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ の左随伴である. よって層化は余極限を保つ. また, 各層 $\mathcal{F}_i$ の層化は $\mathcal{F}_i$ 自身に同型である. よって, 余極限 $\varinjlim \mathcal{F}_i$ の層化は図式 $\mathcal{F}_i$ の余極限である. $\square$

以上により, 層の圏 $\mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ は完備かつ余完備であることがわかる.

デカルト閉

ここでは $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ とし, $\mathcal{U}$ は小さい景とする. $\mathcal{U}$ 上の集合の層の圏 $\mathbf{Sh}(\mathcal{U})$ について考える.

$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ を $\mathcal{U}$ 上の前層とする. 各 $U \in \mathbf{Ob}(\mathcal{U})$ に対し, $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U) = \mathbf{Nat}(\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_U}, \mathcal{G}|_{\mathcal{U}_U})$ とする. ただし, $\mathbf{Nat}(-, -)$ は自然変換全体からなる集合である. これにより, 前層 $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}$ が定まる.

命題 1.2.16. $\mathcal{G}$ が層ならば $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}$ も層である.

証明. 次の図式が差核であることを示す.

$$\mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U) \rightarrow \prod \mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U_i) \xrightarrow[r_2]{r_1} \prod \mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U_i \times_U U_j)$$

$(f_i) \in \prod \mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U_i)$ について, $r_1((f_i)) = r_2((f_i))$ を仮定する. 任意の $\forall V = (V \rightarrow U) \in \mathbf{Ob}(\mathcal{U}_U)$ をとり, $V_i = V \times_U U_i$ とする. この時, 次の図式を可換にするただ一つの射 $f_V : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{G}(V)$ が存在する.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \prod \mathcal{F}(V_i) & \rightrightarrows & \prod \mathcal{F}(V_i \times_V V_j) \\ f_V \downarrow & & \downarrow \prod f_{i, V_i} & & \downarrow \prod f_{i, V_i \times_V V_j} \\ \mathcal{G}(V) & \longrightarrow & \prod \mathcal{G}(V_i) & \rightrightarrows & \prod \mathcal{G}(V_i \times_V V_j) \end{array}$$

これにより, ただ一つの自然変換 $f \in \mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U)$ が定まる. $\square$

$\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ を $\mathcal{U}$ 上の前層とする. 各自然変換 $f : \mathcal{F} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ に対し, $\hat{f} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}^{\mathcal{G}}$ を次のように定義する.

各 $U \in \mathbf{Ob}(\mathcal{U})$, $s \in \mathcal{F}(U)$ に対し, $g = \hat{f}_U(s) : \mathcal{G}|_{\mathcal{U}_U} \rightarrow \mathcal{H}|_{\mathcal{U}_U}$ を定義したい. これを, 各 $V \in \mathbf{Ob}(\mathcal{U}_U)$, $t \in \mathcal{G}(V)$ に対し, $g_V(t) = f(r_{V \rightarrow U}(s), t)$ によって定義する.

命題 1.2.17. $f \mapsto \hat{f}$ なる対応により, $\mathbf{Nat}(\mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mathcal{H}) \cong \mathbf{Nat}(\mathcal{F}, \mathcal{H}^{\mathcal{G}})$ である.

証明. 逆の対応を作ればよい. これは, 各自然変換 $\hat{f} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}^{\mathcal{G}}$ に対して, $f_U(s, t) = (\hat{f}_U(s))_U(t)$ とすれば作れる. $\square$

積景上の層

$\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ は景とする．積景 $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ について考察する．

$$\mathbf{PSh}(\mathcal{U} \times \mathcal{V}; \mathcal{C}) \cong \mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathbf{PSh}(\mathcal{V}; \mathcal{C}))$$

が成り立つことは簡単にわかる．これから，上記の同型が次の同型を導くことを示す．

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{U} \times \mathcal{V}; \mathcal{C}) \cong \mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathbf{Sh}(\mathcal{V}; \mathcal{C}))$$

積景 $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ 上の前層 $\mathcal{F}$ および景 $\mathcal{U}$ の対象 U に対し，圏 $\mathcal{C}$ に値を持つ $\mathcal{V}$ 上の前層 $\mathcal{F}[U]$ を

$$\mathcal{F}[U](V) = \mathcal{F}(U, V)$$

によって定める．さらに， $U \mapsto \mathcal{F}[U]$ によって定まる，圏 $\mathbf{PSh}(\mathcal{V}; \mathcal{C})$ に値を持つ $\mathcal{U}$ 上の前層を $\mathcal{F}'$ と書く．

命題 1.2.18. $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ 上の前層 $\mathcal{F}$ が層であるための必要十分条件は，任意の U に対し前層 $\mathcal{F}[U]$ が層であり，かつ前層 $\mathcal{F}'$ が層であることである．

証明.

必要性

前層 $\mathcal{F}$ が層であると仮定する．まず，景 $\mathcal{U}$ の任意の対象 U を固定する．景 $\mathcal{V}$ の任意の対象 V および V の任意の被覆 $\{V_i \rightarrow V\}$ に対し， $\{(U, V_i) \rightarrow (U, V)\}$ は (U, V) の被覆である．よって，次の図式は差核である．

$$\mathcal{F}(U, V) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U, V_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U, V_i \times_V V_j)$$

よって前層 $\mathcal{F}[U]$ は層である．

次に，前層 $\mathcal{F}'$ が層であることを示すため，景 $\mathcal{U}$ の任意の対象 U および U の任意の被覆 $\{U_i \rightarrow U\}$ をとる．圏 $\mathbf{PSh}(\mathcal{V}; \mathcal{C})$ 上の極限は sectionwise に計算できるため，景 $\mathcal{V}$ の任意の対象 V をとり，次の図式を考える．

$$\mathcal{F}(U, V) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i, V) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_j, V)$$

$\{(U_i, V) \rightarrow (U, V)\}$ は (U, V) の被覆だから，上の図式は差核である．よって，次の図式は差核である．

$$\mathcal{F}[U] \rightarrow \prod \mathcal{F}[U_i] \rightrightarrows \prod \mathcal{F}[U_i \times_U U_j]$$

すなわち，前層 $\mathcal{F}'$ は層である．

十分性

任意の U に対し前層 $\mathcal{F}[U]$ が層であり，かつ前層 $\mathcal{F}'$ が層であると仮定する．積景 $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ の任意の対象 (U, V) および (U, V) の任意の被覆 $\{(U_i, V_j) \rightarrow (U, V)\}$ をとる．次の図式が差核であることを示す．

$$\mathcal{F}(U, V) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i, V_j) \xrightarrow[r]{l} \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_{i'}, V_j \times_V V_{j'})$$

ただし, 上図の l は $(U_i \times_U U_{i'}, V_j \times_V V_{j'}) \rightarrow (U_i, V_j)$ が導く射であり, r は $(U_i \times_U U_{i'}, V_j \times_V V_{j'}) \rightarrow (U_{i'}, V_{j'})$ が導く射である. 同様に,

- $U_i \times_U U_{i'} \rightarrow U_i$ が導く射を $l^1 : \prod \mathcal{F}(U_i, -) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_{i'}, -)$,
- $U_i \times_U U_{i'} \rightarrow U_{i'}$ が導く射を $r^1 : \prod \mathcal{F}(U_i, -) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_{i'}, -)$,
- $V_j \times_V V_{j'} \rightarrow V_j$ が導く射を $l^2 : \prod \mathcal{F}(-, V_j) \rightarrow \prod \mathcal{F}(-, V_j \times_V V_{j'})$,
- $V_j \times_V V_{j'} \rightarrow V_{j'}$ が導く射を $r^2 : \prod \mathcal{F}(-, V_j) \rightarrow \prod \mathcal{F}(-, V_j \times_V V_{j'})$ と書く.

この時, $l = l^1 \circ l^2 = l^2 \circ l^1$ と $r = r^1 \circ r^2 = r^2 \circ r^1$ に注意する.

圏 $\mathcal{C}$ 上の射 $f : \cdot \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i, V_j)$ に対し, $l \circ f = r \circ f$ を満たしていたと仮定する. このとき, $l^1 \circ l^2 \circ f = r^1 \circ r^2 \circ f$ である. ここで, $id \times id : U_i \rightarrow U_i \times_U U_{i'}$ が導く射を $l^1 \circ l^2 \circ f = r^1 \circ r^2 \circ f$ の両辺に左から合成すれば, $l^2 \circ f = r^2 \circ f$ を得る. (厳密に言えば, l^1 および r^1 を積の形に分解し, 上記の射の合成が存在するよう値域を適切に制限する必要がある.) $l^2 \circ f = r^2 \circ f$ より, 次の図式を可換にする f' がただ一つ存在する.

$$\begin{array}{ccc} \prod \mathcal{F}(U_i, V) & \longrightarrow & \prod \mathcal{F}(U_i, V_j) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i, V_j \times_V V_{j'}) \\ f' \uparrow & \nearrow f & \\ \cdot & & \end{array}$$

先ほどと同様の議論により, $l^1 \circ f = r^1 \circ f$ である. 次の図式の上行は差核である.

$$\begin{array}{ccc} \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_{i'}, V) & \longrightarrow & \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_{i'}, V_j) \xrightleftharpoons[r^2]{l^2} \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_{i'}, V_j \times_V V_{j'}) \\ l^1 \circ f' \uparrow \uparrow r^1 \circ f' & \nearrow l^1 \circ f = r^1 \circ f & \\ \cdot & & \end{array}$$

よって $l^1 \circ f' = r^1 \circ f'$ である. よって, 次の図式を可換にする f'' がただ一つ存在する.

$$\begin{array}{ccc} \prod \mathcal{F}(U, V) & \longrightarrow & \prod \mathcal{F}(U_i, V) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_{i'}, V) \\ f'' \uparrow & \nearrow f' & \\ \cdot & & \end{array}$$

この f'' は次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U, V) & \longrightarrow & \prod \mathcal{F}(U_i, V_j) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_{i'}, V_j \times_V V_{j'}) \\ f'' \uparrow & \nearrow f & \\ \cdot & & \end{array}$$

また, $\mathcal{F}(U, V) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i, V_j)$ は $\mathcal{F}(U, V) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i, V) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i, V_j)$ と二つの単射の合成に分解できるので, これは単射である. よって, 上記のような f'' は存在すれば一意である. 以上より, 差核の普遍性が直接証明できた. $\square$

2日目 モデル圏と condensed set

2.1 モデル圏

2.1.1 単体的集合

単体的集合

有限序数とは $\mathbf{n} = \{0, 1, \dots, n-1\}$ で表現される有限順序集合のことである。ただし、 $\mathbf{0} = \emptyset$ である。有限序数を対象、順序保存写像を射とする圏を Δ と書く。圏 Δ を単体圏 (simplicial category) と呼ぶ。

定義 2.1.1 (単体的集合). 単体的集合 (simplicial set) とは、単体圏 Δ 上の (集合の) 前層のことである。単体的集合の圏を $\mathbf{sSet}$ と書くことにする。

各自然数 i を第 i 頂点に対応させることで、各有限序数 $\mathbf{n}$ は $n-1$ 次元単体 Δ^{n-1} と同一視できる。さらに、順序保存写像は線型に拡張することで単体圏 Δ から位相空間の圏 $\mathbf{Top}$ へ埋め込み関手が存在する。この埋め込みは関手 $G: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{sSet}$ を導く。この関手 G は左随伴関手 $F: \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$ を持つ。この関手 F を幾何学的実現 (geometric realization) と呼ぶ。

米田埋め込みを $y: \Delta \rightarrow \mathbf{sSet}; \mathbf{n} \mapsto \Delta(-, \mathbf{n})$ と書いたとき、単体的集合 $y(\mathbf{n})$ を Δ^{n-1} と書き、 n -単体と呼ぶ。また、単体的集合 $X: \Delta^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ に対し、集合 $X(\mathbf{n})$ を X_{n-1} と書く。単体的集合は単体複体の一般化であり、 X_n は複体 X を構成する n 次元単体の集合と見做せる。(ただし、この単体はつぶれていることもある。) 実際、米田の補題により次が成り立つ。

命題 2.1.2. X は単体的集合、 Δ^n は単体とする。このとき、全単射 $\mathbf{sSet}(\Delta^n, X) \cong X_n$ が存在する。

境界と角 (つの)

自然数 n に対し、単体 Δ^n が定まる。この境界を表す単体的集合 $\partial\Delta^n$ は次のように具体的に定まる。

$$(\partial\Delta^n)_k = \{f \in \Delta(\mathbf{k}+1, \mathbf{n}) \mid \text{Im}(f) \neq \mathbf{n}\}$$

また, 境界 $\partial\Delta^n$ からさらに第 i -面を除いたものを Λ_i^{n-1} と書き, $(n-1, i)$ -角 (つの; horn) と呼ぶ. これは具体的に次のように定まる.

$$(\Lambda_i^{n-1})_k = \{f \in \Delta(\mathbf{k} + \mathbf{1}, \mathbf{n}) \mid \text{Im}(f) \neq \mathbf{n}, \mathbf{n} - \{i\}\}$$

2.1.2 モデル圏

リフト性質

一般の圏上で, 次の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

このような可換図式を射 $(\alpha, \beta) : f \rightarrow g$ で表す. 次の可換図式を可換にするような射 $\gamma : B \rightarrow X$ を, 可換図式 (α, β) のリフトと呼ぶ.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & \nearrow \gamma & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

さらに次の記法を導入しよう.

定義 2.1.3 (Joyal の記法). L と R は射のクラスとする. 任意の $f \in L$ と任意の $g \in R$ および任意の可換図式 $(\alpha, \beta) : f \rightarrow g$ に対し, (α, β) のリフトが存在するとき, $L \pitchfork R$ と書く. 特に, $L = \{f\}$ (resp. $R = \{g\}$) の時, $f \pitchfork R$ (resp. $L \pitchfork g$) と書く. さらに $L = \{f\}$ かつ $R = \{g\}$ の時, $f \pitchfork g$ と書く.

注意 2.1.4. 二つの射 $f : A \rightarrow B$ と $g : X \rightarrow Y$ に対し, 次の写像が定まる.

$$g_* \times f^* : \text{Hom}(B, X) \rightarrow \text{Hom}(B, Y) \times_{\text{Hom}(A, Y)} \text{Hom}(A, X)$$

$f \pitchfork g$ であることは, 上記の写像 $g_* \times f^*$ が全射であることと同値である.

$L \pitchfork R$ が成り立つとき, L が R に対して左リフト性質 (left lifting property) を持つと言う. この時, R が L に対して右リフト性質 (right lifting property) を持つとも言う. 射のクラス I に対して右 (resp. 左) リフト性質を持つ射全体のクラスを $\text{rlp}(I)$ (resp. $\text{llp}(I)$) で表す.

弱分解系

定義 2.1.5 (弱分解系). $\mathcal{C}$ を圏とする. $\mathcal{C}$ 上の弱分解系 (*weak factorization system*)(L, R) とは, 射のクラス L と R の組であって, 次を満たすもののことである.

- $\mathcal{C}$ 上の任意の射 f に対し, f の分解 $f = r_f \circ l_f$ で $(r_f, l_f) \in R \times L$ なるものが存在する.
- $L \pitchfork R$ である.
- $f \pitchfork R \Rightarrow f \in L$ である.
- $L \pitchfork g \Rightarrow g \in R$ である.

$\mathcal{C}$ 上の関手的弱分解系 (L, R) とは, 弱分解系 (L, R) であって, 上記の対応 $f \mapsto (r_f, l_f) \in R \times L$ が関手的にとれることである.

注意 2.1.6. (L, R) が弱分解系であることは, 次を満たすことと同値である.

- $\mathcal{C}$ 上の任意の射 f に対し, f の分解 $f = r_f \circ l_f$ で $(r_f, l_f) \in R \times L$ なるものが存在する.
- $L = \text{llp}(R)$ である.
- $\text{rlp}(L) = R$ である.

モデル圏

定義 2.1.7 (モデル圏 [11, 10, 18]). $\mathcal{C}$ は完備かつ余完備な圏とする. $\mathcal{C}$ 上のモデル構造とは, 三つ組 $(W, \text{Fib}, \text{Cof})$ で次を満たすもののことを言う.

(2-out-of-3)

三つの射 f, g および $g \circ f$ のうち二つが W に含まれるならば, 残りの一つも W に含まれる.

(factorization)

$(\text{Cof} \cap W, \text{Fib})$ と $(\text{Cof}, \text{Fib} \cap W)$ は $\mathcal{C}$ 上の (関手的) 弱分解系である.

W (*resp.* Fib , Cof) に属する射を弱同値 (*weak equivalence*)(*resp.* 束 (*fibration*), 余束 (*cofibration*)) と呼ぶ.

モデル圏とはモデル構造を備えた完備かつ余完備な圏のことを言う.

注意 2.1.8. 弱分解系 $(\text{Cof} \cap W, \text{Fib})$ と $(\text{Cof}, \text{Fib} \cap W)$ が関手的であることを要求するかどうかは文献による.

(余) 束対象と (余) 束置換

モデル圏を考える理由の一つは、ホモトピー圏の間の導来関手を計算できることである。モデル圏 $\mathcal{C}$ のホモトピー圏 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ とは、弱同値のクラス W による局所化 $\mathcal{C}[W^{-1}]$ のことである。右導来関手 (resp. 左導来関手) は束置換 (resp. 余束置換) を用いて計算することができる。ここでは (余) 束対象および (余) 束置換の基本的な定義と性質を調べる。

定義 2.1.9. $\mathcal{C}$ はモデル圏とする。 $\mathcal{C}$ の終対象 (resp. 始対象) を $\mathbf{1}$ (resp. $\emptyset$) と書く。

- 対象 X が束対象 (*fibrant object*) であるとは、ただ一つの射 $X \rightarrow \mathbf{1}$ が束であることを言う。
- 対象 X の束置換 (*fibrant replacement*) または束分解 (*fibrant resolution*) は弱同値 $X \rightarrow \tilde{X}$ で、終域 $\tilde{X}$ が束対象であるものを言う。
- 対象 X が余束対象 (*cofibrant object*) であるとは、ただ一つの射 $\emptyset \rightarrow X$ が余束であることを言う。
- 対象 X の余束置換 (*cofibrant replacement*) または余束分解 (*cofibrant resolution*) は弱同値 $\hat{X} \rightarrow X$ で、終域 $\hat{X}$ が余束対象であるものを言う。

例 2.1.10. 任意の位相空間 X に対し、ただ一つの射 $X \rightarrow \mathbf{1}$ は Serre 束である。よって、位相空間の圏 **Top** 上の通常モデル構造に対し、任意の位相空間は束対象である。また、CW 複体は余束対象でもある。

例 2.1.11. 任意の単体的集合 X に対し、ただ一つの射 $\emptyset \rightarrow X$ は単射である。よって、単体的集合の圏 **sSet** 上の通常モデル構造に対し、任意の単体的集合は余束対象である。また、**sSet** 上の束対象のことを Kan 複体と呼ぶ。

モデル圏 $\mathcal{C}$ に対し、 $\mathcal{C}$ の束対象全体からなる充満部分圏を $\mathcal{C}_f$ と書き、 $\mathcal{C}$ の余束対象全体からなる充満部分圏を $\mathcal{C}_c$ と書く。さらに $\mathcal{C}$ の束対象かつ余束対象である対象全体からなる充満部分圏を $\mathcal{C}_{fc}$ と書く。

ホモトピー圏と導来関手

$\mathcal{C}$ はモデル圏とし、その弱同値のクラスを W とする。圏の局所化 $\mathcal{C}[W^{-1}]$ を $\mathcal{C}$ のホモトピー圏と呼び、 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ などと書く。 $\mathcal{C}_{fc}$ には射のホモトピーが定義でき、ホモトピー関係で割った商圏を $\pi\mathcal{C}_{fc}$ などと書く。 $\pi\mathcal{C}_{fc}$ は $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ と圏同値である。

定義 2.1.12. $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ はモデル圏とする。関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ の全右 (resp. 左) 導来関手 (*total right (resp. left) derived functor*) $\mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{D})$ とは、 $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{D})$ の $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ に沿った左 (resp. 右) Kan 拡張のことである。 F の全右導来関手を $\mathbb{R}F$ と書き、 F の全左導来関手を $\mathbb{L}F$ と書く。

定義 2.1.13. 次の図式で、関手 $\hat{L}$ が L の K に沿った右 *Kan* 拡張であるとは、任意の関手 $L' : C \rightarrow D$ に対して同型 $\text{Nat}(L', \hat{L}) \cong \text{Nat}(L'K, L)$ が成り立つことを言う。

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ K \uparrow & \searrow \hat{L} & \\ I & \xrightarrow{L} & D \end{array}$$

$id : \hat{L} \rightarrow \hat{L}$ に対応する自然変換 $\epsilon : \hat{L}K \rightarrow L$ を右 *Kan* 拡張の単位射と呼ぶ。右 *Kan* 拡張を $\text{Ran}_K L$ と書く。

関手 $\hat{L}$ が L の K に沿った左 *Kan* 拡張であるとは、任意の関手 $L' : C \rightarrow D$ に対して同型 $\text{Nat}(\hat{L}, L') \cong \text{Nat}(L, L'K)$ が成り立つことを言う。 $id : \hat{L} \rightarrow \hat{L}$ に対応する自然変換 $\eta : L \rightarrow \hat{L}K$ を左 *Kan* 拡張の余単位射と呼ぶ。左 *Kan* 拡張を $\text{Lan}_K L$ と書く。

Quillen 随伴

補題 2.1.14. $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ はモデル圏とする。随伴 $F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ に対し、以下は同値である。

- F が余束と非輪状余束を保つ。
- G が束と非輪状束を保つ。
- F が余束を保ち、 G が束を保つ。
- F が非輪状余束を保ち、 G が非輪状束を保つ。

定義 2.1.15. 上記の条件を満たす随伴 $F \dashv G$ を *Quillen 随伴* と呼ぶ。このとき、 F を左 *Quillen* 関手と呼び、 G を右 *Quillen* 関手と呼ぶ。

命題 2.1.16. モデル圏の間の *Quillen 随伴* $F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ について、 F は全左導来関手 $\mathbb{L}F$ を持つ。双対的に、 G は全右導来関手 $\mathbb{R}G$ を持つ。

$\mathcal{C}_f$ には射の右ホモトピーが定義でき、右ホモトピー関係で割った商圏を $\pi^r \mathcal{C}_f$ などと書く。 $\pi \mathcal{C}_{fc}$ は $\pi^r \mathcal{C}_f$ の充満部分圏と思える。全右導来関手 $\mathbb{R}G$ は G が導く関手 $\pi^r \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{D})$ を $\pi \mathcal{C}_{fc}$ に制限したものと同一視できる。

2.1.3 余束生成モデル圏

超限合成

定義 2.1.17 (超限合成). $\mathcal{C}$ は余完備な圏とし、 λ は序数とする。

- $\mathcal{C}$ 上の λ -合成可能列とは関手 $X : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$ で, $\gamma = \beta + 1$ なる β を持たない任意の $\gamma < \lambda$ に対し, 次の標準的な射が同型となるもののことである.

$$\varinjlim_{\beta < \gamma} X_\beta \rightarrow X_\gamma$$

下記のような λ -合成可能列を (X, f) または f または (f_β) と明示的に書くことにする.

$$X_0 \xrightarrow{f_0} \cdots \xrightarrow{f_{\beta-1}} X_\beta \xrightarrow{f_\beta} X_{\beta+1} \xrightarrow{f_{\beta+1}} \cdots$$

- (X, f) を λ -合成可能列とする. $X_\lambda = \varinjlim X$ と置く. f の超限合成 (または単に合成) とは, 標準的な射 $f^\circ : X_0 \rightarrow X_\lambda$ のことである.

命題 2.1.18. (X, f) は λ -合成可能列とし, R は射のクラスとする. f の超限合成を f° とする. 任意の $\beta < \lambda$ に対して $f_\beta \in R$ ならば, $f^\circ \in R$ である.

証明. 任意の $g \in R$ に対し, 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad g \quad} & B \\ \uparrow & \nearrow & \uparrow \\ X_0 & \xrightarrow{f_0} \cdots \xrightarrow{f_{\beta-1}} X_\beta \xrightarrow{f_\beta} X_{\beta+1} \xrightarrow{f_{\beta+1}} \cdots \rightarrow & \varinjlim X \end{array}$$

$f_0 \in R$ よりリフト $X_1 \rightarrow A$ が存在する. リフト $X_\beta \rightarrow A$ が任意の $\beta < \gamma$ で存在したとする. $\gamma = \beta + 1$ なる β が存在すれば, $f_\beta \in R$ よりリフト $X_\gamma \rightarrow A$ が存在する. そのような β が存在しなければ, X_γ が余極限錐であることからリフト $X_\gamma \rightarrow A$ が存在する. よって, 超限帰納法により錐 $(X, f) \rightarrow A$ がとれる. よってリフト $X_\lambda \rightarrow A$ が存在するので, $f^\circ \in R$ である. $\square$

相対セル複体

定義 2.1.19 (相対セル複体). $\mathcal{C}$ は余完備な圏とし, I は射のクラスとする. I -相対セル複体とは, I に属する射の押し出しの λ -合成可能列の超限合成と同型である射のことである. *i.e.* 射 h が I -相対セル複体であるとは, ある λ -列 f で次を満たすものが存在し, f の超限合成が h と同型になるもののことである.

任意の $\beta < \lambda$ に対して $i_\beta \in I$ と次の押し出し図式が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{f_\beta} & \cdot \\ \uparrow & & \uparrow \\ \cdot & \xrightarrow{i_\beta} & \cdot \end{array}$$

I -相対セル複体全体のクラスを $\text{cell}(I)$ と書く.

$\text{cell}(I)$ は $\mathcal{C}$ の部分圏である. また, セルをまとめて貼り合わせることもできる.

命題 2.1.20. $\mathcal{C}$ は余完備な圏とし, I は射のクラスとする. 射のクラス J を $\{\coprod_{\lambda} i_{\lambda} \mid i_{\lambda} \in I(\forall \lambda)\}$ として定める. このとき, $\text{cell}(I) = \text{cell}(J)$ である.

証明. $\text{cell}(I) \subset \text{cell}(J)$ は明らか. $\text{cell}(I) \supset \text{cell}(J)$ を示す.

次の押し出し図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ \coprod A_{\lambda} & \xrightarrow{\coprod i_{\lambda}} & \coprod B_{\lambda} \end{array}$$

J -相対セル複体は上の f のような射の超限合成である. よって, 上のような f が常に I -相対セル複体であることを示せば, J -相対セル複体は I -相対セル複体であることが示される.

上の図式が押し出しであると仮定し, $f \in \text{cell}(I)$ であることを示す. 添え字 λ の集合を Λ とする. Λ を基数と同一視して, 整列集合とみなす.

Λ が有限の場合

$\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$ としてよい. 射の列 $X = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} X_n$ を次の図式が押し出しになるものとして定義する.

$$\begin{array}{ccc} X_{k-1} & \xrightarrow{f_k} & X_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ A_k & \xrightarrow{i_k} & B_k \end{array}$$

$f' = f_n \circ \dots \circ f_1$ とする. このとき, 次の図式が存在する.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X_n \\ \uparrow & & \uparrow \\ \coprod A_{\lambda} & \xrightarrow{\coprod i_{\lambda}} & \coprod B_{\lambda} \end{array}$$

これが押し出し図式であることは直接確かめられる.

Λ が無限の場合

Λ -合成可能列 (Z, g) を次のように定める. $Z_0 = X$ とする. Z_{β} が定義できていた時, $g_{\beta} : Z_{\beta} \rightarrow Z_{\beta+1}$ を次の図式が押し出しになるように定める.

$$\begin{array}{ccc} Z_{\beta} & \xrightarrow{g_{\beta}} & Z_{\beta+1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ A_{\beta} & \xrightarrow{i_{\beta}} & B_{\beta} \end{array}$$

$\beta+1 = \gamma$ なる β が存在せず, 任意の $\beta < \gamma$ に対し Z_β が定義できていた時, $Z_\gamma = \lim_{\beta < \gamma} Z_\beta$ とする. このように Λ -合成可能列 (Z, g) を構成すると, g の超限合成 g° は I -相対セル複体である. さらに, 次の図式が存在する.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g^\circ} & X_\Lambda \\ \uparrow & & \uparrow \\ \coprod A_\lambda & \xrightarrow{\coprod i_\lambda} & \coprod B_\lambda \end{array}$$

これが押し出し図式であることは直接確かめられる. □

相対 CW 複体は相対セル複体の例の一つである.

例 2.1.21. 位相空間の圏 **Top** を考える相対 CW 複体とは, $\aleph_0$ -列 (X, f) で次を満たすものの超限合成に同型な連続写像のことである.

任意の自然数 n に対し, 次の押し出し図式が存在する.

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{f_n} & X_{n+1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \coprod S^{n-1} & \longrightarrow & \coprod D^n \end{array}$$

集合 $I_{\mathbf{Top}}$ を $\{S^{n-1} \hookrightarrow D^n\}$ として定義する. 相対 CW 複体は $I_{\mathbf{Top}}$ -相対セル複体である. すなわち, $I_{\mathbf{Top}}$ -相対セル複体とは相対 CW 複体の一般化である.

小対象

定義 2.1.22 (小対象). $\mathcal{C}$ は余完備圏とし, $\mathcal{D}$ は $\mathcal{C}$ の部分圏とする.

- κ は基数とする. 対象 W が $\mathcal{D}$ に対して相対的に κ -小であるとは, 任意の正則基数 $\lambda \geq \kappa$ および $\mathcal{D}$ 上の任意の λ -合成可能列 X に対し, 次の写像が全単射になることである.

$$\lim_{\beta} \mathcal{C}(W, X_\beta) \cong \mathcal{C}(W, \lim_{\beta} X_\beta)$$

(ただし, $\lim_{\beta} X$ は $\mathcal{C}$ 上の余極限とする.)

- 特に $\mathcal{D} = \mathcal{C}$ の時, W は単に κ -小であると言う.
- 対象 W が $\mathcal{D}$ に対して相対的に小であるとは, ある基数 κ に対して対象 W が $\mathcal{D}$ に対して相対的に κ -小であることを言う.
- 特に $\mathcal{D} = \mathcal{C}$ の時, W は単に小であると言う.

例 2.1.23. $\mathcal{U}$ は小さい圏とする. 任意の対象 $u \in \text{Ob}(\mathcal{U})$ に対し, 前層 $\mathcal{U}(-, u) \in \mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathbf{Set})$ は $\aleph_0$ -小である. 実際, 米田の補題により次の全単射が成り立つ.

$$\begin{aligned} \varinjlim_{\beta} \mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathbf{Set})(\mathcal{U}(-, u), X_{\beta}) &\cong \varinjlim_{\beta} (X_{\beta}[u]) \\ &\cong (\varinjlim_{\beta} X_{\beta})[u] \\ &\cong \mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathbf{Set})(\mathcal{U}(-, u), \varinjlim_{\beta} X_{\beta}). \end{aligned}$$

例 2.1.24. $\mathcal{U}$ は任意の被覆が有限細分を持つ小さい景とする. この時, $\mathcal{U}$ 上の層 $\mathcal{F}$ が前層の圏 $\mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathbf{Set})$ 上で κ -小ならば, $\mathcal{F}$ は層の圏 $\mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathbf{Set})$ 上で κ -小である. 実際, 次の同型が成り立つ.

$$\begin{aligned} \varinjlim_{\beta} \mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathbf{Set})(\mathcal{F}, X_{\beta}) &\cong \varinjlim_{\beta} \mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathbf{Set})(\mathcal{F}, X_{\beta}) \\ &\cong \mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathbf{Set})(\mathcal{U}(-, u), \varinjlim_{\beta} X_{\beta}) \\ &\cong \mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathbf{Set})(\mathcal{U}(-, u), \varinjlim_{\beta} X_{\beta}) \end{aligned}$$

ここで, 任意の被覆が有限細分を持つことから, 層としての余極限 $\varinjlim_{\beta} X_{\beta}$ は前層としての余極限に一致していることに注意する.

小対象指数

定義 2.1.25 (小対象指数). $\mathcal{C}$ は余完備圏とし, I は $\mathcal{C}$ の射の集合とする.

- κ は基数とする. I が κ -小対象指数を許容するとは, I に含まれる全ての射 $x \rightarrow y$ に対し, 始域 x が部分圏 $\text{cell}(I)$ に対して相対的に κ -小であることを言う.
- I が小対象指数を許容するとは, ある基数 κ に対して I が κ -小対象指数を許容することを言う.

命題 2.1.26 (D. M. Kan). $\mathcal{C}$ は余完備圏とし, I は $\mathcal{C}$ の射の集合とする. I が小対象指数を許容するならば, $\mathcal{C}$ 上の任意の射 f に対し, $p_f \in \text{rlp}(I)$ かつ $i_f \in \text{cell}(I)$ を満たす (関手的) 分解 $f = p_f \circ i_f$ が存在する.

証明. [10] を参照. □

これは次のように改良できる.

命題 2.1.27. $\mathcal{C}$ は余完備圏とし, I は $\mathcal{C}$ の射の集合とする. $\text{Cof}(I) = \{I\text{-相対セル複体のレトラクト}\}$ とする. I が小対象指数を許容するならば, $(\text{Cof}(I), \text{rlp}(I))$ は (関手的) 弱分解系である.

証明. 命題 2.1.26 に加え, 明らかでないのは次の性質である. これを示す.

- $f \pitchfork \text{rlp}(I) \Rightarrow f \in \text{Cof}(I)$.

$f \pitchfork \text{rlp}(I)$ と仮定する. $p_f \in \text{rlp}(I)$ かつ $i_f \in \text{cell}(I)$ を満たす分解 $f = p_f \circ i_f$ をとる. 次の図式を可換にする射 h が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{i_f} & \cdot \\ f \downarrow & \nearrow h & \downarrow p_f \\ \cdot & \xrightarrow{id} & \cdot \end{array}$$

よって, f は I -相対セル複体 i_f のレトラクトである. □

余束生成モデル圏

定義 2.1.28 (余束生成モデル圏). モデル圏 $\mathcal{C}$ のモデル構造が余束生成 (*cofibrantly generated*) であるとは, $\mathcal{C}$ 上の射の集合 I と J が存在し, 次を満たすことである.

- $\mathcal{C}$ 上の余束のクラスは, I -相対セル複体のレトラクトのクラスに一致する.
- $\mathcal{C}$ 上の非輪状余束のクラスは, J -相対セル複体のレトラクトのクラスに一致する.
- I と J は共に小対象引数を許容する.

このとき, I が余束を生成すると言い, J が非輪状余束を生成すると言う.

例 2.1.29 (単体的集合の圏 $\mathbf{sSet}$). 単体的集合の圏 $\mathbf{sSet}$ は余束生成モデル圏である. 実際, 単体の境界の埋め込み $\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n$ たちの集合を $I_{\mathbf{sSet}}$, 角の埋め込み $\Lambda_i^{n-1} \hookrightarrow \Delta^n$ たちの集合を $J_{\mathbf{sSet}}$, 幾何学的実現が弱ホモトピー同値になる射のクラスを弱同値のクラスとすると, これらは $\mathbf{sSet}$ 上の余束生成モデル構造を生成する.

射のクラス I に対し, I -相対セル複体のレトラクトのクラスを $\text{Cof}(I)$ と表す. 射の集合 I と J が与えられた時, これらが余束生成モデル圏を生成するための必要十分条件は, 次の定理で与えられる.

定理 2.1.30 (認容定理 (Recognition Theorem)). $\mathcal{C}$ を圏とし, W は $\mathcal{C}$ 上の射のクラス, I と J は $\mathcal{C}$ 上の射の集合とする. I が余束を, J が非輪状余束を生成し, W を弱同値のクラスとする $\mathcal{C}$ 上の余束生成モデル構造が存在するための必要十分条件は, 次を満たすことである.

1. $\text{Cof}(J) \subset \text{Cof}(I) \cap W$ である.
2. $\text{rlp}(I) \subset \text{rlp}(J) \cap W$ である.
3. 上記の二つの包含のうち, 片方について逆の包含が成り立つ. すなわち, 次のいずれかが成り立つ.

(a) $\text{Cof}(J) \supset \text{Cof}(I) \cap W$ である.

(b) $\text{rlp}(I) \supset \text{rlp}(J) \cap W$ である.

4. 三つの射 f, g および $g \circ f$ のうち二つが W に含まれるならば, 残りの一つも W に含まれる.

5. I と J は小対象引数を許容する.

証明. 条件 5. と命題 2.1.27 より, $(\text{Cof}(I), \text{rlp}(I))$ と $(\text{Cof}(J), \text{rlp}(J))$ は弱分解系である. 次を示す.

1. $\text{Cof}(J) = \text{Cof}(I) \cap W$ である.

2. $\text{rlp}(I) = \text{rlp}(J) \cap W$ である.

条件 1. と 2. と 3. より, どちらかは既に満たされている. 証明は全く同様なので, $\text{Cof}(J) = \text{Cof}(I) \cap W$ であると仮定し, $\text{rlp}(I) = \text{rlp}(J) \cap W$ であることを示す. 条件 2. より, $\text{rlp}(I) \subset \text{rlp}(J) \cap W$ である. あとは $\text{rlp}(I) \supset \text{rlp}(J) \cap W$ であることを示せばよい. 任意に $f \in \text{rlp}(J) \cap W$ をとる. $(\text{Cof}(I), \text{rlp}(I))$ が弱分解系であることから, $f = p \circ i$ なる分解で $i \in \text{Cof}(I)$ かつ $p \in \text{rlp}(I)$ を満たすものが存在する. $\text{rlp}(I) \subset \text{rlp}(J) \cap W$ より, $p \in W$ である. $f \in W$ であることと条件 4. より, $i \in W$ である. よって, $\text{Cof}(J) = \text{Cof}(I) \cap W$ であることより, $i \in \text{Cof}(J)$ である. よって次の図式はリフト g を持つ.

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \\ \downarrow i & \nearrow g & \downarrow f \\ \cdot & \xrightarrow{\quad p \quad} & \cdot \end{array}$$

これは f が p のレトラクトであることを意味する. よって, $f \in \text{rlp}(I)$ である.

以上より, $\text{Cof} = \text{Cof}(I)$ および $\text{Fib} = \text{rlp}(J)$ とすれば, $(W, \text{Fib}, \text{Cof})$ が求めるモデル構造である. $\square$

定理 2.1.31. $\mathcal{C}$ は射の集合 I が余束を, J が非輪状余束を生成する余束生成モデル圏の構造を持つとする. W は $\mathcal{C}$ の弱同値のクラスとする. 一般の圏 $\mathcal{D}$ と随伴 $F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ に対し, 次を満たすと仮定する.

1. $F(I)$ と $F(J)$ は小対象引数を許容する.

2. $\text{cell}(F(J)) \subset G^{-1}(W)$ である.

このとき, $\mathcal{D}$ 上の余束生成モデル構造であって, $G^{-1}(W)$ を弱同値のクラスとして, 集合 $F(I)$ が余束を, $F(J)$ が非輪状余束を生成するものが存在する. さらにこのとき, 随伴 $F \dashv G$ は Quillen 随伴である.

証明. 定理 2.1.30 の簡単な応用. $\square$

例 2.1.32 (位相空間の圏 **Top**). 単体的集合の圏 **sSet** と位相空間の圏 **Top** の間には随伴がある. これにより, **sSet** 上の余束生成モデル構造は **Top** 上へ推移する. このとき, **sSet** と **Top** は Quillen 同値になる.

2.2 condensed set

2.2.1 Stone 空間

Stone 空間

定義 2.2.1. 位相空間が完全不連結 (*totally disconnected*) であるとは, 任意の連結成分が一点集合となることである. Stone 空間または副有限集合 (*profinite set*) とは, 完全不連結なコンパクト Hausdorff 空間のことである. Stone 空間と連続写像の圏を **Stone** と書くことにする.

定義 2.2.2. 位相空間が極端不連結 (*extremally disconnected*) であるとは, 任意の開集合の閉包が開集合となることである. Stonean 空間とは, 極端不連結なコンパクト Hausdorff 空間のことである. Stonean 空間と連続写像の圏を **Stonean** と書くことにする.

命題 2.2.3. 以下が成り立つ.

- 極端不連結 $\not\Rightarrow$ 完全不連結
- Stonean 空間 $\Rightarrow$ Stone 空間

証明. 二点以上を持つ集合に密着位相を入れれば, これは極端不連結ではあるが完全不連結ではない.

X は Stonean 空間とする. 任意の点 $x \in X$ をとり, x を含む連結成分を A とする. x と異なる点 $y \in X$ を任意に取る. $y \notin A$ であることを示す. X は Hausdorff だから, x と y は互いに交わらない開近傍 U と V ($x \in U, y \in V$) で分離できる. X は極端不連結だから, U の閉包 $\bar{U}$ は開集合である. $\bar{U}$ は開集合かつ閉集合だから, A の連結性より, $A \subset \bar{U}$ である. よって $y \notin A$ である. 以上より X は完全不連結である. $\square$

Stone の表現定理

可換環 R に対し, $\text{Spec}(R) = \{R \text{ の素イデアル} \}$ とする. R のイデアル I に対して $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid I \subset \mathfrak{p}\}$ とする. $V(I)$ 達は $\text{Spec}(R)$ の閉集合系を作る. これにより定まる位相を Zariski 位相といい, Zariski 位相を備えた $\text{Spec}(R)$ を R のスペクトル (spectrum) と言う.

定義 2.2.4. 可換環 B が Boole 環 (*Boolean ring*) であるとは, 任意の $b \in B$ に対して $b^2 = b$ を満たすことである. Boole 環と環準同型の圏を **Boole** と書くことにする.

定義 2.2.5. 束 (*lattice*) とは, 半順序集合 L であって, 任意の二元 $x, y \in L$ に対し上限 $x \vee y$ と下限 $x \wedge y$ を持つもののことである. 束 B が *Boole 束* (*Boolean lattice*) であるとは, 最大限 1 と最小限 0 を持ち, 任意の $b \in B$ に対して次を満たす元 $\neg b$ を持つことを言う.

$$b \vee \neg b = 1, b \wedge \neg b = 0$$

束準同型とは, $\vee, \wedge, 1, 0$ を保つ写像のことである. *Boole 束* と束準同型の圏を **BooleLattice** と書くことにする.

命題 2.2.6. **Boole** と **BooleLattice** は圏同型である.

証明の概略. 任意の Boole 環に対し, 順序関係 $\leq$ および演算 $\vee, \wedge, \neg$ を次のように定めると Boole 束ができる.

$$\begin{aligned} x \leq y &\Leftrightarrow x = xy \\ x \vee y &= x + y + xy \\ x \wedge y &= xy \\ \neg x &= 1 + x \end{aligned}$$

逆に, 任意の Boole 束に対し, 演算 $+, \cdot$ を次のように定めると Boole 環ができる.

$$\begin{aligned} x + y &= (x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y) \\ x \cdot y &= x \wedge y \end{aligned}$$

□

定理 2.2.7 (Stone). **Stone** は **Boole**^{op} と圏同値である.

証明の概略. $B \mapsto \text{Spec}(B)$ は関手 **Boole**^{op} $\rightarrow$ **Stone** を定める. 逆に, 任意の Stone 空間に対し, 開かつ閉である部分集合からなる Boole 束を対応させれば関手 **Stone** $\rightarrow$ **Boole**^{op} が定まる. これらは圏同値を定める. □

Stone による上記の対応で, Stonean 空間は完備 Boole 束の圏と対応する.

定義 2.2.8. 束 L が完備であるとは, 任意の部分集合 $S \subset L$ に対し上限 $\vee S$ と下限 $\wedge S$ を持つことを言う.

Stone 空間による被覆

集合 X に対し, X の部分集合全体の集合を $\mathfrak{P}(X)$ と置く. $\mathfrak{P}(X)$ は完備 Boole 環である. よって, Stonean 空間 $\overline{X} = \text{Spec}(\mathfrak{P}(X))$ を得る. 点 $x \in X$ に対し, $\mathfrak{m}_x = \{A \subset X \mid x \notin A\}$ と置く. 写像 $X \rightarrow \overline{X}$ を $x \mapsto \mathfrak{m}_x$ によって定める. この写像は明らかに単射である.

命題 2.2.9. 構成 $X \mapsto \overline{X}$ によって定まる関手 **Set** $\rightarrow$ **Stonean** は全射を保つ.

以下の命題は Stone-Čech コンパクト化の特殊な場合である.

命題 2.2.10. 任意の集合 X に対し, 上記の写像 $X \rightarrow \overline{X}$ は次の普遍性を満たす.

任意のコンパクト *Hausdorff* 空間 Y と任意の写像 $X \rightarrow Y$ に対し, 以下の図式を可換にする連続写像 $\overline{X} \rightarrow Y$ がただ一つ存在する.

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \nearrow & \\ \overline{X} & & \end{array}$$

証明の概略. 各点 $x \in \overline{X}$ は Boole 環 $\mathfrak{P}(X)$ の素イデアル $\mathfrak{p}_x$ に対応するが, これは素フィルター F_x に対応する.

$$F_x = \{X - A \mid A \in \mathfrak{p}_x\}$$

写像 $f: X \rightarrow Y$ による素フィルター F_x の順像 f_*F_x は素フィルターである.

$$f_*F_x = \{U \subset Y : \text{open} \mid f^{-1}(U) \in F_x\}$$

Y のコンパクト性より, 任意の素フィルターは共通交点を持つ. Y の Hausdorff 性より, 一点集合は閉集合だから, 素フィルターは共通交点に収束する. Y の Hausdorff 性より, 任意のフィルターの極限は一意である. $x \mapsto \lim f_*F_x$ によって写像 $\overline{X} \rightarrow Y$ が定まる. これは連続であり, 上記の図式を可換にする. 一意性は写像 $X \rightarrow \overline{X}$ の像が稠密であることからわかる. $\square$

命題 2.2.11. 任意のコンパクト *Hausdorff* 空間 X に対し, (関手的に構成される) Stonean 空間 $\hat{X}$ および (自然な) 連続全射 $\hat{X} \rightarrow X$ が存在する. また, 構成 $X \mapsto \hat{X}$ は全射および (有限) 和を保つ.

証明. X の底集合を X^d と書く. 自然な全単射 $X^d \rightarrow X$ が存在する. $X^d \rightarrow \overline{X^d}$ の普遍性により, 以下の図式を可換にする連続写像 $\overline{X^d} \rightarrow X$ がただ一つ存在する.

$$\begin{array}{ccc} X^d & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \\ \overline{X^d} & & \end{array}$$

$\hat{X} = \overline{X^d}$ は Stonean 空間である. $X^d \rightarrow X$ が全射であることから, $\hat{X} \rightarrow X$ も全射である. $\square$

2.2.2 condensed set

Stone 空間の圏上の位相

次の三つの圏 **CG**, **Stone**, **Stonean** に位相を入れて景としたい.

- **CG**: コンパクト Hausdorff 空間と連続写像の圏
- **Stone**: Stone 空間と連続写像の圏
- **Stonean**: Stonean 空間と連続写像の圏

それぞれにいくつかの被覆を考えることができるが、次の被覆が定める位相は全て同値である。

定義 2.2.12. コンパクト Hausdorff 空間 X の **CG**-被覆 (*resp.* **Stone**-被覆, **Stonean**-被覆) とは, 連続写像の有限族 $\{X_i \rightarrow X\}_i$ であって, 各 X_i がコンパクト Hausdorff 空間 (*resp.* Stone 空間, Stonean 空間) であり, $\coprod_i X_i \rightarrow X$ が全射であるもののこととする。

圏 **CG** において **CG**-被覆を被覆とすると前位相が定まる。一方, 圏 **CG** において **Stone**-被覆または **Stonean**-被覆を被覆とすると coverage が定まる。また, 圏 **Stone** において **Stone**-被覆を被覆とすると前位相が定まる。一方, 圏 **Stone** において **Stonean**-被覆を被覆とすると coverage が定まる。最後に, 圏 **Stonean** において **Stonean**-被覆を被覆とすると coverage が定まる。次の命題により,

表 2.1: 被覆は coverage または前位相を定める

	CG -被覆	Stone -被覆	Stonean -被覆
CG	前位相	coverage	coverage
Stone	×	前位相	coverage
Stonean	×	×	coverage

命題 2.2.13. **CG** 上の前層 $\mathcal{F} : \mathbf{CG}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ に対し, 以下は同値である。

1. **CG**-被覆が定める前位相に対し, 前層 $\mathcal{F}$ は層である。
2. **Stone**-被覆が定める coverage に対し, 前層 $\mathcal{F}$ は層である。
3. **Stonean**-被覆が定める coverage に対し, 前層 $\mathcal{F}$ は層である。

証明. $1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3.$ は明らか。 $3. \Rightarrow 1.$ を示す。任意の **CG**-被覆 $\{X_i \rightarrow X\}_i$ を取る。各 X_i に対し, Stonean 空間 $\widehat{X}_i$ からの全射連続写像 $\widehat{X}_i \rightarrow X_i$ が存在する。 $\{\widehat{X}_i \rightarrow X\}_i$ は X の **Stonean**-被覆である。次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{F}(X) & \longrightarrow & \prod_i \mathcal{F}(\widehat{X}_i) & \rightrightarrows & \prod_{i,j} \mathcal{F}(\widehat{X}_i \times_X \widehat{X}_j) \\
 \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathcal{F}(X) & \longrightarrow & \prod_i \mathcal{F}(X_i) & \rightrightarrows & \prod_{i,j} \mathcal{F}(X_i \times_X X_j)
 \end{array}$$

3. より, 図式の上行は差核である。 $\widehat{X}_i \rightarrow X_i$ は X_i の **Stonean**-被覆なので, 3. より, 図式の真ん中の縦の写像は単射である。 よって図式の下行は差核である。 以上より, 前層 $\mathcal{F}$ は **CG**-被覆が定める前位相に対して層である。 $\square$

全く同様に、以下も示すことができる。

命題 2.2.14. **Stone** 上の前層 $\mathcal{F} : \mathbf{Stone}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ に対し、以下は同値である。

1. **Stone**-被覆が定める前位相に対し、前層 $\mathcal{F}$ は層である。
2. **Stonean**-被覆が定める *coverage* に対し、前層 $\mathcal{F}$ は層である。

condensed set

定義 2.2.15. コンデンス集合 (*condensed set*) とは、景 **Stone** 上の層のことである。コンデンス集合の圏を **Cond** と書くことにする。

注意 2.2.16. **Stone** は小さい圏ではないので、景 **Stone** 上の層は小さい集合で表現できない。よって、コンデンス集合の圏 **Cond** をそのまま扱うのは不便である。実は、コンデンス集合は小さい集合によって完全に特徴づけることができ、**Cond** は小さい対象のみを持つ同値な圏で置き換えることができる。

例 2.2.17. 位相空間 X に対し、コンデンス集合 $\mathbf{Top}(-, X)$ が定まる。これを X に同伴するコンデンス集合と呼ぶ。ここではこれを $\mathrm{Sing}^c(X)$ と書くことにする。

埋め込みの列 $\mathbf{Stonean} \rightarrow \mathbf{Stone} \rightarrow \mathbf{CH}$ は、景 **CH** 上の層 $\mathcal{F}$ から景 **Stone** 上の層 $\mathcal{F}|_{\mathbf{Stone}}$ および **Stonean** 上の層 $\mathcal{F}|_{\mathbf{Stonean}}$ を導く。埋め込み $\mathbf{Stonean} \rightarrow \mathbf{Stone}$ は、景 **Stone** 上の層 $\mathcal{G}$ から景 **Stonean** 上の層 $\mathcal{G}|_{\mathbf{Stonean}}$ を導く。

定理 2.2.18. **Stonean** 上の層 $\mathcal{F}$ に対し、景 **Stone** (resp. **CH**) 上の層 $\mathcal{G}$ で制限 $\mathcal{G}|_{\mathbf{Stonean}}$ が $\mathcal{F}$ と同型になるものが同型を除いてただ一つ存在する。

証明. Stone 空間 (resp. コンパクト Hausdorff 空間) X に対し、 $\mathcal{F}(\hat{X})$ の部分集合 $\mathcal{G}(X)$ を、次を満たす元 $s \in \mathcal{F}(\hat{X})$ の集合として定める。

Stonean 上の次の形の任意の可換図式に対し、 s は $\mathcal{F}(\hat{X}) \rightrightarrows \mathcal{F}(V)$ の差核に入る。

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \longrightarrow & X \\ \uparrow & & \uparrow \\ V & \longrightarrow & \hat{X} \end{array}$$

上記の V は小さい集合では添え字づけられないが、直感的には次の図式が差核であることを意味する。

$$\mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{F}(\hat{X}) \rightrightarrows \prod_V \mathcal{F}(V)$$

構成 $X \mapsto \mathcal{G}(X)$ は景 **Stone** (resp. **CH**) 上の前層 $\mathcal{G}$ を与え、その制限 $\mathcal{G}|_{\mathbf{Stonean}}$ は $\mathcal{F}$ と同型になる。

任意の Stone 空間 (resp. コンパクト Hausdorff 空間) X および任意の **Stonean**-被覆 (resp. **CH**-被覆) $\{X_i \rightarrow X\}_i$ をとる. $\widehat{Y}_i = \widehat{X} \times_X X_i$ とすると, **Stonean**-被覆 $\{\widehat{Y}_i \rightarrow \widehat{X}\}_i$ が定まる. $X_{ij} = X_i \times_X X_j$ と置く. 形式的に次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \prod_i \mathcal{F}(V'_i) & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \\
 \prod_V \mathcal{F}(V) & & \prod_{V_i} \mathcal{F}(V_i) & & \\
 \uparrow \uparrow & & \uparrow \uparrow & & \\
 \mathcal{F}(\widehat{X}) & \longrightarrow & \prod_i \mathcal{F}(\widehat{Y}_i) & \Longrightarrow & \prod_{U_{ij}} \mathcal{F}(U_{ij}) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathcal{G}(X) & \longrightarrow & \prod_i \mathcal{G}(X_i) & \Longrightarrow & \prod_{i,j} \mathcal{G}(X_{ij}).
 \end{array}$$

ここで, V, V_i, U_{ij} はそれぞれ次の形の可換図式全てを渡るものとする.

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{X} \longrightarrow X & \widehat{Y}_i \longrightarrow X_i & \widehat{Y}_i \longrightarrow \widehat{X} \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 V \longrightarrow \widehat{X} & V_i \longrightarrow \widehat{Y}_i & U_{ij} \longrightarrow \widehat{Y}_j
 \end{array}$$

V'_i は V_i に代入できるもので, 各 V に対して次のように定める. まず, 次の図式を引き戻しとるように W_i が定まる.

$$\begin{array}{ccc}
 V & \longrightarrow & \widehat{X} \times_X \widehat{X} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 W_i & \longrightarrow & \widehat{Y}_i \times_{X_i} \widehat{Y}_i
 \end{array}$$

そこで $V'_i = \widehat{W}_i$ とする. このとき, $\{V'_i \rightarrow V\}_i$ は **Stonean**-被覆である. よって, $\mathcal{F}(V) \rightarrow \prod_i \mathcal{F}(V'_i)$ は単射である. また, 図式の左二列および真ん中の行は差核である. よって, 下一行も差核である. よって前層 $\mathcal{G}$ は層である. 以上より, 層 $\mathcal{G}$ の存在が示された.

一意性を示すため, 層 $\mathcal{H}$ についてもその制限 $\mathcal{H}|_{\mathbf{Stonean}}$ が $\mathcal{F}$ と同型であったと仮定する. このとき, 自然同型 $\mu: \mathcal{G}|_{\mathbf{Stonean}} \rightarrow \mathcal{H}|_{\mathbf{Stonean}}$ が存在する. 任意の Stone 空間 (resp. コンパクト Hausdorff 空間) X に対し, $\eta_X: \mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ を, 次の図式が可換になる唯一のものと定める.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{H}(X) & \longrightarrow & \mathcal{H}(\widehat{X}) & \Longrightarrow & \mathcal{H}(\widehat{X} \times_X \widehat{X}) \\
 \uparrow \eta_X & & \uparrow \mu_{\widehat{X}} & & \uparrow \mu_{\widehat{X} \times_X \widehat{X}} \\
 \mathcal{G}(X) & \longrightarrow & \mathcal{G}(\widehat{X}) & \Longrightarrow & \mathcal{G}(\widehat{X} \times_X \widehat{X}).
 \end{array}$$

ここで, $\mathcal{G}(\widehat{X} \times_X \widehat{X}) \rightarrow \widehat{\mathcal{G}(\widehat{X} \times_X \widehat{X})}$ および $\mathcal{H}(\widehat{X} \times_X \widehat{X}) \rightarrow \widehat{\mathcal{H}(\widehat{X} \times_X \widehat{X})}$ が単射であることから, 上図の二つの行はそれぞれ差核になることに注意する. η_X の族は自然同型 $\eta: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ を定める. 以上で一意性も示せた. $\square$

系 2.2.19. 任意のコンデンス集合 $\mathcal{F}$ に対し, 景 **CH** 上の層 $\mathcal{G}$ で制限 $\mathcal{G}|_{\mathbf{Stone}}$ が $\mathcal{F}$ と同型になるものが同型を除いてただ一つ存在する.

系 2.2.20. X は位相空間, X_i は有限添え字 $i \in I$ で添え字付けられた Hausdorff 空間の族とする. 連続写像 $X_i \rightarrow X$ の族がすべて固有写像 (コンパクト集合の引き戻しがコンパクト) で, $\coprod_i X_i \rightarrow X$ が全射とする. このとき, 次の図式はコンデンス集合の圏 **Cond** 上の余差核である.

$$\coprod_{i,j} \mathrm{Sing}^c(X_i) \times_{\mathrm{Sing}^c(X)} \mathrm{Sing}^c(X_j) \rightrightarrows \coprod_i \mathrm{Sing}^c(X_i) \rightarrow \mathrm{Sing}^c(X)$$

証明. 余差核の普遍性を直接確かめるため, **Cond** 上の次の図式を考える.

$$\coprod_{i,j} \mathrm{Sing}^c(X_i) \times_{\mathrm{Sing}^c(X)} \mathrm{Sing}^c(X_j) \rightrightarrows \coprod_i \mathrm{Sing}^c(X_i) \rightarrow Y$$

これは **CH** 上の層の図式とみなしてよい. 各コンパクト Hausdorff 空間 A に対し, 写像 $f_A: \mathbf{Top}(A, X) \rightarrow Y(A)$ を次のように定める. 連続写像 $\sigma: A \rightarrow X$ をとる. $A_i = X_i \times_X A$ と置くと, これはコンパクト Hausdorff 空間である. さらに連続写像の族 $\{A_i \rightarrow A\}_i$ は **CH**-被覆である. σ の引き戻しは $\sigma_i: A_i \rightarrow X_i$ と書いておく. 写像 $\mathbf{Top}(A_i, X_i) \rightarrow Y(A_i)$ による σ_i の像を $\tau_i \in Y(A_i)$ と書く. $A_{ij} = A_i \times_A A_j$ として, 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i,j} \mathbf{Top}(A_{ij}, X_i) \times_{\mathbf{Top}(A_{ij}, X)} \mathbf{Top}(A_{ij}, X_j) & \rightrightarrows & \coprod_i \mathbf{Top}(A_{ij}, X_i) \longrightarrow Y(A_{ij}) \\ \Psi & & \Psi \\ (\sigma_i|_{A_{ij}}, \sigma_j|_{A_{ij}}) & \longmapsto & \tau_i|_{A_{ij}} = \tau_j|_{A_{ij}}. \end{array}$$

Y は景 **CH** 上の層だから, $\tau|_{A_i} = \tau_i$ を満たす $\tau \in Y(A)$ がただ一つ存在する. そこで, $f_A(\sigma) = \tau$ によって写像 $f_A: \mathbf{Top}(A, X) \rightarrow Y(A)$ が定まる. これらはコンデンス集合の射 $f: \mathrm{Sing}^c(X) \rightarrow Y$ を定め, これは一意である. $\square$

モデル構造

次の三つの圏 **sSet**, **Cond**, **Top** のモデル構造について考える.

- **sSet**: 単体的集合の圏
- **Cond**: コンデンス集合の圏
- **Top**: 位相空間と連続写像の圏

まずは次の随伴の列を考える.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{sSet} & \xleftarrow{G_0} & \mathbf{Cond} & \xleftarrow{G_1} & \mathbf{Top}. \\ & \top & & \top & \\ & \xrightarrow{F_0} & & \xrightarrow{F_1} & \end{array} \quad (2.1)$$

上記の関手は次のように定義する.

- $G_0(X)_n = \mathbf{Cond}(\Delta^n, X)$.
- $G_1(X) = \text{Sing}^c(X)$ (cf. 例 2.2.17).
- F_0 は幾何学的実現と全く同様に定義される. 一応, 具体的には次のようになる.

$$F_0(X) := \int^n \mathbf{sSet}(\Delta^{n-1}, X) \bullet \Delta^{n-1},$$

ただし, $(-) \bullet (-)$ は余冪である.

- $F_1(X)$ は, 集合 $X(\mathbf{1})$ の上に, $s_* : A \rightarrow X(\mathbf{1})$ (A は Stone 空間, $s \in X(A)$) がすべて連続となる最強の位相を入れ位相空間とする. ただし, 写像 s_* は次のように定義されている. 各点 $a \in A$ は一点集合からの写像 $a : \mathbf{1} \rightarrow A$ と見做せる. これは写像 $a^* : X(A) \rightarrow X(\mathbf{1})$ を導く. そこで, $s_*(a) = a^*(s)$ とする.

系 2.2.19 より, $G_0|_{\mathbf{CH}} : \mathbf{CH} \rightarrow \mathbf{Cond}$ は米田埋め込みと同一視できるので, 特に充満忠実である. よって $\Delta^n \cong G_1(\Delta^n)$ である. (これは圏 $\mathbf{Cond}$ 上の単体 Δ^n の定義である.) また, F_0 の構成より $F_0(\Delta^n) \cong \Delta^n$ である. 系 2.2.20 は, 有限個のコンパクト Hausdorff 空間については, 圏 $\mathbf{Cond}$ 上の貼り合わせと圏 $\mathbf{Top}$ 上の貼り合わせが一致することを意味する. 特に, $F_0(\partial\Delta^n) \cong G_0(|\partial\Delta^n|) \cong G_0(S^{n-1})$ や $F_0(\Lambda_i^n) \cong G_0(|\Lambda_i^n|) \cong G_0(\Delta^n)$ などが成り立つ.

$\mathbf{Cond}$ 上の余束構造は次の集合によって生成される.

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{Cond}} &= \{\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n\} \\ J_{\mathbf{Cond}} &= \{\Delta^n \xrightarrow{0} \Delta^n \times \Delta^1\}. \end{aligned}$$

これらは $F_0 I_{\mathbf{sSet}}$ および $F_0 J_{\mathbf{sSet}}$ と同値である.

系 2.2.21. コンデンス集合の圏 $\mathbf{Cond}$ は次の余束生成モデル構造を持つ.

- f は弱同値 $\Leftrightarrow G_0(f)$ は弱同値.
- f は束 $\Leftrightarrow f$ は $J_{\mathbf{Cond}}$ に対して右リフト性質を持つ.
- f は余束 $\Leftrightarrow f$ は相対 $I_{\mathbf{Cond}}$ -セル複体である.

さらに, $F_0 \dashv G_0$ と $F_1 \dashv G_1$ は *Quillen* 同値である.

これを証明する前に, HELP について説明する.

定義 2.2.22. 圏 $\mathbf{Cond}$ 上の射 $f : X \rightarrow Y$ が *HELP* (*Homotopy-Extension-Lifting-Property*) を満たすとは, 任意の以下の図式に対し, 斜めの射 $\Delta^n \rightarrow X$ で, 上三角を可換にし, 下三角は $\partial\Delta^n$ を止めるホモトピー同値を除いて可換にするものが存在することを言う.

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

補題 2.2.23 (HELP 補題). 圏 $\mathbf{Cond}$ 上の射 f に対し, $G_0(f)$ が弱同値であるとき, かつその時に限り, f は *HELP* を満たす.

系 2.2.21 の証明の概略. 余束生成モデル構造の推移定理 (定理 2.1.31) により, $\mathbf{sSet}$ 上のモデル構造を随伴 $F_0 \dashv G_0$ によって推移させたい. そのため, 以下を確かめればよい.

- (1) $I_{\mathbf{Cond}}$ と $J_{\mathbf{Cond}}$ は小対象引数を許容する.
- (2) 任意の相対 $J_{\mathbf{Cond}}$ -セル複体 f に対し, $G_0(f)$ は弱同値である.

定理 2.2.19 より, (1) は例 2.1.24 と全く同様にわかる. 残りは (2) を示せばよい.
任意の相対 $J_{\mathbf{Cond}}$ -セル複体 $f : X \rightarrow Y$ をとる. f が *HELP* を満たすことを示せばよい.

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

f は, 各因子 $Z_\beta \rightarrow Z_{\beta+1}$ が $j \in J$ の押し出しである λ -合成可能列 Z の合成である. $Z_\beta \rightarrow Z_\lambda \cong Y$ が以下の図式に対して *HELP* を持つような序数 $\beta(\leq \lambda)$ のうち最小のものを β_0 と置く.

$$\begin{array}{ccccc} \partial\Delta^n & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Z_\beta \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \Delta^n & \longrightarrow & & \longrightarrow & Y. \end{array}$$

β_0 が極限序数ならば, 関手 $\mathbf{Cond}(\Delta^n, -)$ と $\mathbf{Cond}(\partial\Delta^n, -)$ がフィルター余極限を保つことに反する. β_0 が $\beta_0 - 1$ の後者序数ならば, 射 $Z_{\beta_0-1} \rightarrow Z_{\beta_0}$ 強変位レトラクトであることに反する. よって $\beta_0 = 0$ でなければならない. これは f が *HELP* を持つことを意味し, すなわち $G_0(f)$ は弱同値である. よって (2) が示された. 以上で推移定理の条件が確かめられたので, 圏 $\mathbf{Cond}$ はモデル構造を持つ.

次に, $F_0 \dashv G_0$ と $F_1 \dashv G_1$ が Quillen 同値であることを示す. $F_1 F_0 \dashv G_0 G_1$ が Quillen 同値であるため, $F_0 \dashv G_0$ が Quillen 同値であることを示せばよい. $F_1 F_0 \dashv G_0 G_1$ が Quillen 同値であることから, Quillen 随伴 $F_0 \dashv G_0$ の導来随伴の単位射は自然同型である. $F_0 \dashv G_0$

の余単位射 $F_0 G_0(X) \rightarrow X$ が非輪状束であることは直接計算で簡単に確かめられる．任意の単体的集合はモデル圏 $\mathbf{sSet}$ における余束対象であることから， $F_0 \dashv G_0$ の余単位射自身が $F_0 \dashv G_0$ の導来随伴の余単位射自身を導く．よって， $F_0 \dashv G_0$ の導来随伴の余単位射は自然同型である．すなわち $F_0 \dashv G_0$ の導来随伴は圏同値である．これは $F_0 \dashv G_0$ が Quillen 同値であることを意味する． $\square$

3日目 連続層

3.1 連続層と可撓層

3.1.1 連続層

連続層

これ以降、位相空間 B は局所コンパクト、パラコンパクト、Hausdorff 程度を仮定すると便利である。

定義 3.1.1. コンデンス集合の圏 **Cond** に値を持つ層 (*resp.* 前層) を連続層 (*resp.* 連続前層) と呼ぶ。

圏 **Cond** の特徴をまとめる。

- 完備かつ余完備である。
- デカルト閉である。
- デカルト閉モデル構造を持ち、任意のコンデンス集合は束対象である。
- 次の随伴の列は Quillen 同値の列である。

$$\begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{G_0} & & \xleftarrow{G_1} & \\ \mathbf{sSet} & \xrightarrow{\quad \tau \quad} & \mathbf{Cond} & \xrightarrow{\quad \tau \quad} & \mathbf{Top}. \\ & \xrightarrow{F_0} & & \xrightarrow{F_1} & \end{array} \quad (3.1)$$

- G_1 をコンパクト Hausdorff 空間の圏 **CH** に制限すると充満忠実である。
- 米田埋め込みと $G_1|_{\mathbf{CH}}$ が導く関手 $\mathbf{Cond} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{CH}^{op}}; X \mapsto \mathbf{Cond}(G_1(-), X)$ は充満忠実かつ任意のフィルター余極限を保つ。(これは包含関手 $\mathbf{Sh}(\mathbf{CH}) \hookrightarrow \mathbf{PSh}(\mathbf{CH})$ と同値である。) 特に、コンデンス集合 X は関手 $\mathbf{Cond}(G_1(-), X)$ と同一視できる。
- G_0 は任意のフィルター余極限を保ち、 F_0 は有限極限を保つ。
- **Cond** と **Top** それぞれの充満部分圏で、有限複体を対象としたものを $\mathbf{Cond}^f$ および $\mathbf{Top}^f$ と書くことにすると、随伴 $F_1 \dashv G_1$ は $\mathbf{Cond}^f$ と $\mathbf{Top}^f$ の圏同値を導く。

以上の性質から、さらに次の性質がわかる。

- フィルター余極限と有限極限が交換し、IPC 性質を満たす。特に、**Cond** に値を持つ前層は層化を持つ。
- **Cond** に値を持つ層の間の射 $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が同型であるとき、かつその時に限り、すべての茎の間の射 $f_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ が同型である。

位相空間 B 上の連続層の圏を $\mathbf{Sh}(B; \mathbf{Cond})$ 、連続前層の圏を $\mathbf{PSh}(B; \mathbf{Cond})$ と書く。
Cond = $\mathbf{Sh}(\mathbf{CH}; \mathbf{Set})$ より、(厳密な言明ではないが、)

$$\begin{aligned} \mathbf{Sh}(B; \mathbf{Cond}) &\cong \mathbf{Sh}(B_{top} \times \mathbf{CH}; \mathbf{Set}) \cong \mathbf{Sh}(\mathbf{CH}; \mathbf{Sh}(B; \mathbf{Set})) \\ \mathbf{PSh}(B; \mathbf{Cond}) &\cong \mathbf{Sh}(\mathbf{CH}; \mathbf{PSh}(B; \mathbf{Set})) \end{aligned}$$

が成り立つ。 B 上の連続層 $\mathcal{F}$ およびコンパクト Hausdorff 空間 A に対し、集合に値を持つ B 上の層 $\mathcal{F}[A]$ を

$$\mathcal{F}[A](U) = \mathcal{F}(U)(A) (\cong \mathbf{Cond}(A, \mathcal{F}(U)))$$

によって定める。連続層 $\mathcal{F}$ の茎 $\mathcal{F}_x$ はコンデンス集合である。 $X \mapsto \mathbf{Cond}(G_1(-), X)$ はフィルター余極限を保つので、各 CH 空間 A に対し集合 $\mathcal{F}_x(A)$ は茎 $\mathcal{F}[A]_x$ に一致する。

$\mathcal{F}$ を B 上の連続層とし、 $A \subset B$ を任意の部分集合とする。ここでは単に $\mathcal{F}(A) = \varinjlim_{U \supset A} \mathcal{F}(U)$ と定める。 $\mathcal{F}$ の $A \hookrightarrow B$ による引き戻しを $\mathcal{F}|_A$ と書く。 B が正則空間で、 A が閉集合であれば、 $\mathcal{F}(A) \cong \mathcal{F}|_A(A)$ である。

可撓層

連続層の可撓性について定義する。

定義 3.1.2. B 上の連続層の射 $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が可撓 (*flexible*) または可撓 (*flexible*) であるとは、任意のコンパクト対 $K \subset L(\subset B)$ について、射 $\mathcal{F}(L) \rightarrow \mathcal{F}(K) \times_{\mathcal{G}(K)} \mathcal{G}(L)$ が Serre 束になることである。 B 上の連続層 $\mathcal{F}$ が可撓 (*flexible*) であるとは、 $\mathcal{F} \rightarrow \mathbf{1}$ が可撓であることである。

注意 3.1.3. 連続層 $\mathcal{F}$ が可撓であることは、制限射 $\mathcal{F}(L) \rightarrow \mathcal{F}(K)$ が Serre 束になることと同値である。

上記の射 $\mathcal{F}(L) \rightarrow \mathcal{F}(K) \times_{\mathcal{G}(K)} \mathcal{G}(L)$ は今後何度も扱う。そこで、記号を用意しておく。

定義 3.1.4. B 上の連続層の射 $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ および任意のコンパクト対 $K \subset L(\subset B)$ に対し、射 $\mathcal{F}(L) \rightarrow \mathcal{F}(K) \times_{\mathcal{G}(K)} \mathcal{G}(L)$ を $f_{K \subset L}$ と書くことにする。

これは $f_K: \mathcal{F}(K) \rightarrow \mathcal{G}(K)$ の一般化になっている。

命題 3.1.5. B 上の連続層の射 $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ および任意のコンパクト部分集合 $K(\subset B)$ に対し、 f_K と $f_{\emptyset \subset K}$ は同型である。

証明. $\mathcal{F}(\emptyset) = \mathcal{G}(\emptyset) = 1$ より明らか. □

底空間が特殊な場合には, 可撓性は局所的な性質である.

命題 3.1.6. B は局所コンパクトな正規ハウスドルフ空間とする. このとき, B 上の連続層 $\mathcal{F}$ に対し, 以下は同値である.

1. $\mathcal{F}$ は可撓層である.
2. 任意の点 $x \in B$ に対し, x の開近傍 U が存在し, $\mathcal{F}|_U$ は可撓層であるようにできる.

証明. $1 \Rightarrow 2$ は明らか. $2 \Rightarrow 1$ を示す.

任意のコンパクト対 K と $L(K \subset L \subset B)$ をとり, 制限射 $\mathcal{F}(L) \rightarrow \mathcal{F}(K)$ が Serre 束になることを示せばよい.

条件 2 より, 各点 $x \in B$ に対し, x の開近傍 U_x が存在し, $\mathcal{F}|_{U_x}$ は可撓層であるようにできる. B は局所コンパクトな正規ハウスドルフ空間だから, 相対コンパクトな x の開近傍 V_x が存在し, $V_x \subseteq U_x$ とできる. $\{V_x\}_{x \in L}$ はコンパクト集合 L の開被覆だから, L から有限個の点 $x_1, \dots, x_n$ を選んで $\{V_{x_i}\}_{1 \leq i \leq n}$ が L を被覆するようである. U_{x_i} および V_{x_i} を改めて U_i および V_i と書く. $L_i = L \cap \text{cl}(V_i)$ と置く. n 以下の自然数 i に対し,

$$M_i = K \cup L_1 \cup \dots \cup L_i$$

と置く. ただし, $M_0 = K$ である. $K_i = M_{i-1} \cap L_i$ と置くと, $M_i = M_{i-1} \cup L_i$ である. よって, 命題 ?? より, 次の図式は引き戻しである.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(M_i) & \longrightarrow & \mathcal{F}(L_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(M_{i-1}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(K_i) \end{array}$$

$\mathcal{F}|_{U_i}$ は可撓層だから, 制限射 $\mathcal{F}(L_i) \rightarrow \mathcal{F}(K_i)$ は Serre 束になる. よって, 制限射 $\mathcal{F}(M_i) \rightarrow \mathcal{F}(M_{i-1})$ は Serre 束になる. よって, 制限射 $\mathcal{F}(L) = \mathcal{F}(M_n) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{F}(M_0) = \mathcal{F}(K)$ は Serre 束になる. 以上より $\mathcal{F}$ は可撓層である. □

全く同様に, 次のことも示すことができる.

命題 3.1.7. B は正規ハウスドルフ空間とする. このとき, B 上の連続層 $\mathcal{F}$ に対し, 以下は同値である.

1. $\mathcal{F}$ は可撓層である.
2. B の有限閉被覆 $\{B_i\}_i$ が存在し, 各 $\mathcal{F}|_{B_i}$ が可撓層であるようにできる.

上記二つを組み合わせれば以下を得る.

命題 3.1.8. B は局所コンパクトな正規ハウスドルフ空間とする. このとき, B 上の連続層 $\mathcal{F}$ に対し, 以下は同値である.

1. $\mathcal{F}$ は可撓層である.
2. B の局所有限閉被覆 $\{B_i\}_i$ が存在し, 各 $\mathcal{F}|_{B_i}$ が可撓層であるようにできる.

3.1.2 モデル構造

以下の問を考える.

問題. 連続層の圏 $\mathbf{Sh}(B; \mathbf{Cond})$ 上に, 以下を満たすモデル構造は存在するか?

- $\mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop})$ 上の射 f に対し,
 f が弱同値である $\Leftrightarrow f$ は *stalkwise* に弱同値である.
- $\mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop})$ 上の射 f に対し,
 f が束である $\Leftrightarrow f$ が可撓である.

このようなモデル構造の存在は期待できない. しかし, 以下の定理が存在する.

定理 3.1.9. ある (右正則) モデル圏 $\mathbf{PSh}_*(B_{cpt}; \mathbf{qTop})$ および充満忠実かつ有限極限を保つ埋め込み $\iota: \mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop}) \rightarrow \mathbf{PSh}_*(B_{cpt}; \mathbf{qTop})$ が存在し, 次を満たす.

- $\mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop})$ 上の射 f に対し,
 $\iota(f)$ が弱同値である $\Leftrightarrow f$ は *stalkwise* に弱同値である.
 - $\mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop})$ 上の射 f に対し,
 $\iota(f)$ が束である $\Leftrightarrow f$ が可撓拡張である.
- 特に, B 上の連続層 $\mathcal{F}$ に対し,
 $\iota(\mathcal{F})$ が束対象である $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ が可撓である.

$\mathbf{Sh}(B; \mathbf{Cond})$ 上のモデル構造の存在が期待できないのは, 可撓射に対して左リフト性質を満たす余束の存在が期待できないからである. そこで, まずは必要な余束を追加することによって舞台となる圏を拡張することで, 圏 $\mathbf{PSh}_*(B_{cpt}; \mathbf{qTop})$ を構成する. 次に拡張された圏の上で, 二種類のモデル構造を定義する. 最後に, 得られた二種類のモデル構造を混合することで, 希望のモデル構造を得る.

モデル構造を作れない理由

部分集合 $K \subset B$ に対し, 包含写像 $i: K \hookrightarrow B$ は随伴 $i^* \dashv i_*: \mathbf{Sh}(K; \mathbf{Cond}) \rightarrow \mathbf{Sh}(B; \mathbf{Cond})$ を定める. ここでは仮に, 任意のコンパクト部分集合 K に対し, 引き戻し関手 $i^*: \mathbf{Sh}(K; \mathbf{Cond}) \rightarrow \mathbf{Sh}(B; \mathbf{Cond})$ が左随伴 $i_!: \mathbf{Sh}(B; \mathbf{Cond}) \rightarrow \mathbf{Sh}(K; \mathbf{Cond})$ を

持っていたと仮定してみよう．一点集合へのただ一つの写像 $\mu : K \rightarrow \mathbf{1}$ は，随伴 $\mu^* \dashv \mu_* : \mathbf{Cond} \rightarrow \mathbf{Sh}(K; \mathbf{Cond})$ を定める． $\mu^* \dashv \mu_*$ と $i_! \dashv i^*$ を合成することにより，随伴 $i_! \mu^* \dashv \mu_* i^* : \mathbf{Cond} \rightarrow \mathbf{Sh}(B; \mathbf{Cond})$ を得る．各連続層 $\mathcal{F}$ に対し， $\mu_* i^*(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(K)$ である．各擬位相空間 X に対し， $i_! \mu^*(X) = X/K$ と表すことにしよう．このとき，連続層の間の射 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ と任意のコンパクト対 $K \subset L (\subset B)$ について，次の二つの主張は同値である．

- 次の四角図式はリフトを持つ．

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_i^n & \longrightarrow & \mathcal{F}(L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^n & \longrightarrow & \mathcal{F}(K) \times_{\mathcal{G}(K)} \mathcal{G}(L) \end{array}$$

- 次の四角図式はリフトを持つ．

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda_i^n)_{/L} \cup (\Lambda_i^n)_{/K} \Delta^n_{/K} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^n_{/L} & \longrightarrow & \mathcal{G} \end{array}$$

こうして可撓拡張を右リフト性質で特徴づけることができた．

問題は，このような左随伴 $i_! : \mathbf{Sh}(B; \mathbf{Cond}) \rightarrow \mathbf{Sh}(K; \mathbf{Cond})$ の存在が期待できないことである．もしも K が開集合であれば， $i_!$ は 0 延長として構成できる．例えば B が離散集合であれば任意のコンパクト集合が開集合であるが，面白い例ではない．そこで，開集合系の代わりに次のような順序集合 B_{cpt} を考える．

$$B_{cpt} = \{U \cap K \mid U \subset X \text{ は開集合}, K \subset X \text{ はコンパクト}\} \cup \{\text{開集合}\}$$

B_{cpt} 上の前層の圏を考え，そこにモデル構造を入れる．ただし，技術的な理由から，次の条件を考える必要がある．

定義 3.1.10. $\mathbf{Cond}$ に値を持つ B_{cpt} 上の前層 $\mathcal{F}$ が添加前層¹ であるとは， $\mathcal{F}(\emptyset) = \mathbf{1}$ を満たすことである． $\mathbf{Cond}$ に値を持つ B_{cpt} 上の添加前層の圏を $\mathbf{PSh}_*(B_{cpt}; \mathbf{Cond})$ と書く．

これは f_K と $f_{\emptyset \subset K}$ が同型になるための条件である．

埋め込み関手 $\iota : \mathbf{Sh}(B; \mathbf{Cond}) \rightarrow \mathbf{PSh}_*(B_{cpt}; \mathbf{Cond})$ は次のように定義できる．

$$\iota(\mathcal{F})(A) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \supset A}} \mathcal{F}(U)$$

¹Grothendieck による最初の定義では，前層の定義域は空でない開集合全体の集合であった．その意味での前層 $\mathcal{F}$ が存在した時， $\mathcal{F}(\emptyset) = \mathbf{1}$ と定めることによって現代の意味での前層が得られる．これは上記の添加前層である．任意の層は添加前層であるため，実用上は前層と添加前層の区別は必要ないと言えるだろう．ここで，添加単体的集合について同様の議論を行うことを思い出し，これに倣って添加前層という呼称を採用する．

モデル構造

まず、余束生成モデル構造の認容定理より、以下が成り立つ。

定理 3.1.11 (コンパクト可撓モデル構造). 連続層の圏 $\mathbf{PSh}_*(B_{cpt}; \mathbf{Cond})$ 上に、以下を満たすモデル構造が存在する。

- f が弱同値である $\Leftrightarrow$ 任意のコンパクト集合 K に対し、 f_K は弱同値である。
- f が束である $\Leftrightarrow f$ が可撓である。

また、余束生成モデル構造の推移定理を以下の随伴に適用する。

$$\prod_{x \in B} \mathbf{qTop} \begin{array}{c} \xleftarrow{G_{pt}} \\ \top \\ \xrightarrow{F_{pt}} \end{array} PSh_*(\mathcal{W}_B; \mathbf{qTop})$$

ただし、

- $G_{pt}(\mathcal{F}) = (\mathcal{F}(\{x\}))_{x \in B}$
- $[F_{pt}((X^x)_{x \in B})](U) = \begin{cases} \emptyset & (|U| \geq 2) \\ X^x & (U = \{x\}) \\ \mathbf{1} & (U = \emptyset). \end{cases}$

と定義されている。すると次のモデル構造を得る。

定理 3.1.12 (各点射影モデル構造). 圏 $PSh_*(\mathcal{W}_B; \mathbf{qTop})$ は以下を満たすモデル構造を持つ。

- $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が弱同値である
 $\Leftrightarrow$ 任意の点 $x \in B$ に対し、 $f_{\{x\}} : \mathcal{F}(\{x\}) \rightarrow \mathcal{G}(\{x\})$ が弱同値である。
- $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が束である
 $\Leftrightarrow$ 任意の点 $x \in B$ に対し、 $f_{\{x\}} : \mathcal{F}(\{x\}) \rightarrow \mathcal{G}(\{x\})$ が束である。

さらに、このモデル構造は右正則である。

これまでの二つのモデル構造を混合する。これには以下の定理を用いればよい。

定理 3.1.13 (M. Cole [3]). $\mathcal{C}$ を圏とする。 $(W, \mathbf{Fib}, \mathbf{Cof})$ と $(W', \mathbf{Fib}', \mathbf{Cof}')$ は $\mathcal{C}$ 上のモデル構造とする。さらに、次を満たすとする。

- $W \subset W'$
- $\mathbf{Fib} \subset \mathbf{Fib}'$

このとき、 W' を弱同値、 $\mathbf{Fib}$ を束のクラスとする $\mathcal{C}$ 上のモデル構造が存在する。さらに、モデル構造 $(W', \mathbf{Fib}', \mathbf{Cof}')$ が右正則ならば、新たに得られたモデル構造も右正則である。

3.2 ABC fibration 構造

3.2.1 形式的切断の層

形式的切断の層

偏微分関係 R とはジェット束の部分束であり、ファイバー束 R の連続な切断を偏微分関係 R の形式的解と呼ぶのであった。ここでは任意の連続層 $\mathcal{F}$ に対し、 $\mathcal{F}$ の“形式的切断”の層 $\mathcal{F}^*$ が構成できることを述べる。

まずは定義を述べよう。

定義 3.2.1. 位相空間 B 上の連続層 $\mathcal{F}$ に対し、 B 上の前層 $\mathcal{F}^\square$ を

$$\mathcal{F}^\square(U) = \mathcal{F}(U)^{\text{Sing}^c(U)}$$

によって定義する。前層 $\mathcal{F}^\square$ の層化を $\mathcal{F}^*$ と書き、これを $\mathcal{F}$ の形式的切断 (*formal section*) の層または *fiberwise holonomic* 切断の層と呼ぶ。

各射影 $\mathcal{F}(U) \times \text{Sing}^c(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ に対応する射 $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)^{\text{Sing}^c(U)}$ が導く層の射 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ を対角射と呼ぶ。

注意 3.2.2. 対角射をしばしば $\Delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ で表す。これはしばしば誤解を招く表記であるが、ここでは Gromov [8] の表記に合わせる。

注意 3.2.3. 偏微分関係の形式的解と比べると、上記の定義は奇妙に思われるかもしれない。実際、これは *fiberwise holonomic* 切断の層と呼ぶ方が正確である。(cf. [4, p.24]) しかし、実用上これらを区別する必要がないことから、ここでは形式的切断の層と呼ぶ。詳しい説明は本節の後半に回す。

形式的切断の層には別の構成もある。まずは連続層のパラメータ化を定義する。

定義 3.2.4. 位相空間 B 上の連続層 $\mathcal{F}$ および位相空間 P に対し、景 $B_{\text{top}} \times P_{\text{top}}$ 上の前層 $\mathcal{F}^{\square P}$ を

$$\mathcal{F}^{\square P}(U, V) = \mathcal{F}(U)^{\text{Sing}^c(V)}$$

によって定義する。前層 $\mathcal{F}^{\square P}$ の層化を $\mathcal{F}^P$ と書く。 $\mathcal{F}^P$ は景 $B_{\text{top}} \times P_{\text{top}}$ 上の層 (すなわち、 G -位相空間 $B \times P$ 上の層) であるが、これは位相空間 $B \times P$ 上の層と見做せる。 $B \times P$ 上の層 $\mathcal{F}^P$ を $\mathcal{F}$ の P -パラメータ化と呼ぶ。

特に、 $P = B$ の場合を考える。対角射 $B \rightarrow B \times B$ によって連続層 $\mathcal{F}^B$ を引き戻すことができるが、この引き戻しとして得られる B 上の連続層が $\mathcal{F}$ の形式的切断の層である。

命題 3.2.5. 形式的切断の層の、上記の二つの定義は同値である。

証明. ここでは、 $B \times B$ を G -位相空間としての積の構造を入れて考える。前層 $\mathcal{F}^{\square B}$ の対角射 $\Delta : B \rightarrow B \times B$ による引き戻しを $\Delta^p \mathcal{F}^{\square B}$ と書く。 $\Delta^p \mathcal{F}^{\square B}$ の層化が $\mathcal{F}^*$ に同型であることを示せばよい。各開集合 $U \subset B$ に対し、 $\Delta(U) \subset B \times B$ を含む最小の認容開集合は $U \times U$ である。よって、 $\Delta^p \mathcal{F}^{\square B}(U) \cong \mathcal{F}^{\square B}(U \times U) = \mathcal{F}(U)^{\text{Sing}^c(U)}$ である。すなわち $\Delta^p \mathcal{F}^{\square B} \cong \mathcal{F}^\square$ である。よって、この層化は $\mathcal{F}^*$ に同型である。□

Gromov は、底空間 B が多面体であるとき、任意の連続層 $\mathcal{F}$ に対して次の性質を示した。

1. 対角射 $\Delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ は stalkwise に弱同値である。
2. 形式的切断の層 $\mathcal{F}^*$ は可撓層である。

2. の証明は次の小節 3.2.2 に回す。ここでは 1. を証明する。

まず、底空間 B が満たすべき性質を定義する。

定義 3.2.6. 位相空間 B が強局所可縮であるとは、任意の点 $x \in B$ に対し、 x を強変位レトラクトとする開近傍からなる近傍基が存在することを言う。

補題 3.2.7 (Gromov [8], Y.). B は強局所可縮空間とする。 B 上の任意の連続層 $\mathcal{F}$ に対し、対角射 $\Delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ は stalkwise に弱同値である。

証明. HELP 性質を示せばよい。すなわち、下図のような可換な四角図式が存在した時、下図の γ が存在して上三角を可換にし、下三角を高々 $\partial\Delta^n$ を固定するホモトピーによる同値を除いて可換にすることを示せばよい。

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{F}_x \\ \downarrow & \nearrow \gamma & \downarrow \Delta_x \\ \Delta^n & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{F}_x^* \cong \mathcal{F}_x^\square \end{array}$$

x の十分小さい開近傍 U をとり、次の図式を考えてよい。

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & \nearrow \gamma & \downarrow \Delta_x \\ \Delta^n & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{F}(U)^U \end{array}$$

B は局所強可縮だから、 $x \in U$ は強変位レトラクション $p_u : U \rightarrow U$ を持つとしてよい。 p_u は $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)^U$ の強変位レトラクション $H_u : \mathcal{F}(U)^U \rightarrow \mathcal{F}(U)^U$ を導く。 $\gamma = H_1 \circ \beta : \Delta^n \rightarrow \mathcal{F}(U)$ は上三角を可換にし、下三角をホモトピー $H_u \circ \beta$ による同値を除いて可換にする。ホモトピー $H_u \circ \beta$ は $\partial\Delta^n$ を固定する。以上より、 Δ_x が弱同値であることが示された。 $\square$

偏微分関係における形式的切断

“形式的切断”と“形式的解”の違いについて補足する。 $p : E \rightarrow B$ を滑らかなファイバー束とし、 $R \subset J^r E$ を偏微分関係とする。 $\text{Sol}(-; R)$ は偏微分関係 R の厳密解の層とする。ここで、 R の厳密解とは、ファイバー束 R の切断であって、 p の切断の持ち上げとして得られるもののことであった。

注意 3.2.8. ここで、 R の厳密解を「 p の切断であって、持ち上げの像が R に含まれるもの」と定義しない理由は、コンデンス集合としての構造の入れ方に違いがあるからである。 $\text{Sol}(U; R)$ は $\Gamma(U; R)$ と $\Gamma(U; p)$ のどちらにも包含されていると見做すことができる。しかし、ここでは $\Gamma(U; p)$ に包含されているとは考えず、 $\Gamma(U; R)$ から導かれる“相対擬位相”を入れるのである。具体的には次のように定める。各コンパクトハウスドルフ空間 A に対し、

$$\text{Sol}[A](U; R) = \{s : A \times U \rightarrow R \mid \text{各 } t \in A \text{ に対し, } s_t : U \rightarrow R \text{ は厳密解.}\}$$

とすることでコンデンス集合 $\text{Sol}(U; R)$ が定まり、これによって連続層 $\text{Sol}(-; R)$ が定まる。

各位相空間 P に対し、位相空間 $B \times P$ 上の層 $\text{Sol}^P(-; R)$ が

$$\text{Sol}^P(U \times V; R) = \{s : U \times V \rightarrow R \mid \text{各 } p \in V \text{ に対し, } s_p : U \rightarrow R \text{ は厳密解.}\}$$

によって定まる。対角射 $B \rightarrow B \times B$ によって連続層 $\text{Sol}^B(-; R)$ を引き戻すと、 $\text{Sol}^*(-; R)$ が得られる。各切断 $s \in \text{Sol}^*(U; R)$ とは、 R の厳密解の芽を連続的に繋いだものである。このような切断を fiberwise holonomic 切断と呼ぶ。(cf. [4, p.24]) 一方、 R の形式的解とは単にファイバー束 R の連続的切断のことであった。各 fiberwise holonomic 切断 $s(x, y)$ に対し、形式的解 $s(x, x)$ を対応させることにより、連続層の射 $\text{Sol}^*(-; R) \rightarrow \Gamma(-; R)$ が定まる。これは次の図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} \text{Sol}(-; R) & \longrightarrow & \text{Sol}^*(-; R) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \Gamma(-; R) \end{array}$$

命題 3.2.9. 連続層 $\Gamma(-; R)$ は可撓である。

証明. 任意の二つのコンパクト部分集合 $K \subset L (\subset B)$ をとり、次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n \times \{0\} & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma(L; R) \\ \downarrow \wr & \nearrow \exists \gamma & \downarrow \\ \Delta^n \times [0, 1] & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(K; R) \end{array}$$

γ の存在を示せばよい。

十分小さい二つの開集合 $U \supset K, W \supset L$ ($U \subset W$) および二つの射 $\tilde{\alpha} : \Delta^n \times \{0\} \rightarrow$

$\Gamma(W; R), \tilde{\beta} : \Delta^n \times I \rightarrow \Gamma(U; R)$ が存在して、次の図式を可換とする.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Gamma(W; R) & & \\
 & \nearrow \tilde{\alpha} & \downarrow & \searrow & \\
 \Delta^n \times \{0\} & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma(L; R) & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \Delta^n \times [0, 1] & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(K; R) & & \\
 & \nwarrow \tilde{\beta} & \uparrow & \nearrow & \\
 & & \Gamma(U; R) & &
 \end{array}$$

$\tilde{\alpha}' : \Delta^n \times \{0\} \times W \rightarrow R, \tilde{\beta}' : \Delta^n \times [0, 1] \times U \rightarrow R$ を $\tilde{\alpha}'(x, 0, p) = \tilde{\alpha}(x, 0)(p), \tilde{\beta}'(x, t, p) = \tilde{\beta}(x, t)(p)$ で定めると、これは連続である.

今、コンパクト台を持つ連続関数 $\delta : U \rightarrow [0, 1]$ で、 K を含む開集合上で $\delta \equiv 1$ なるものをとる. これを用いて、 $\phi : \Delta^n \times [0, 1] \times U \rightarrow \Delta^n \times [0, 1] \times U$ を $\phi(x, t, p) = (x, t\delta(p), p)$ として定める. また、 $W' = W - \text{supp}(\delta)$ として、 $\psi : \Delta^n \times [0, 1] \times W' \rightarrow \Delta^n \times \{0\} \times W'$ を $\psi(x, t, p) = (x, 0, p)$ として定める. $\tilde{\beta}' \circ \phi$ と $\tilde{\alpha}' \circ \psi$ は上手く貼り合って、 $\tilde{\gamma}' : \Delta^n \times [0, 1] \times W \rightarrow R$ を定める. $\tilde{\gamma} : \Delta^n \times [0, 1] \rightarrow \Gamma(W; R)$ を $\tilde{\gamma}(x, t)(p) = \tilde{\gamma}'(x, t, p)$ で定め、 $\Delta^n \times [0, 1] \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \Gamma(W; R) \rightarrow \Gamma(L; R)$ なる合成を γ とすれば条件を満たす. $\square$

また、後 (cf. 補題 3.2.13) で示す通り、任意の連続層 $\mathcal{F}$ に対し、 $\mathcal{F}^*$ も可撓層である. 系 4.1.14 より、次が成り立つ.

命題 3.2.10. 射 $\text{Sol}^*(-; R) \rightarrow \Gamma(-; R)$ が *stalkwise* に弱同値ならば、これは *sectionwise* に弱同値である.

R が任意の初期値に対して局所解を持てば、射 $\text{Sol}^*(-; R) \rightarrow \Gamma(-; R)$ は *stalkwise* に弱同値である. 例えば R が開であればこの条件を満たす.

可撓積

$f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ は B 上の連続層の間の射とする. f は形式的切断の層の間の射 $\tilde{f} : \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{G}^*$ を導く. $\tilde{f}$ の写像蹟を $\tilde{f}' : \mathcal{F}_f^* \rightarrow \mathcal{G}^*$ と表す.

定義 3.2.11. 上記の $\tilde{f}'$ を f の可撓積と呼ぶことにする.

注意 3.2.12. $\mathcal{G} = \mathbf{1}$ のとき、 $\mathcal{G}^* = \mathbf{1}$ である. よって $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_f^*$ である.

可撓積に関して、次の性質が成り立つ.

補題 3.2.13 (Gromov [8], Y.). B は正規ハウスドルフ空間とする. B 上の連続層の間の任意の射 $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対し、 f の可撓積 $\tilde{f}'$ は可撓拡張である. 特に、 B 上の任意の連続層 $\mathcal{F}$ に対し、 $\mathcal{F}^*$ は可撓層である.

このことを示す前に、位相空間論から一つの補題を準備しておく。

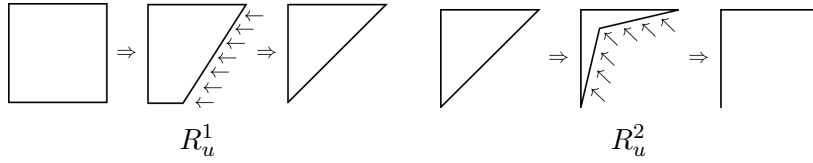
補題 3.2.14. $\Sigma = ([0, 1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$ と置く. $\Sigma \hookrightarrow [0, 1]^2$ は強変位レトラクション $R_u : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ で次を満たすものを持つ.

- $R_0 = id$ かつ $Im(R_1) \subset \Sigma$ である.
- $R_u|_{\Sigma} = id$ である.
- $R_u(s, 0) \in [0, 1] \times \{0\}$ である.

証明. R_u^1 と R_u^2 を次のように定める.

$$\begin{aligned} R_u^1(s, t) &= ((1 - (1 - t)u)s, t) \\ R_u^2(s, t) &= (s, t) + \frac{(1 - |s+t-1|)(1 - |s-t|)}{2} u(-1, 1). \end{aligned}$$

これらは次の図のような変形である.



R_u を次のように定めればよい.

$$R_u(s, t) = \begin{cases} R_{2u}^1(s, t) & (\text{if } 0 \leq u \leq \frac{1}{2}) \\ R_{2u-1}^2(R_1^1(s, t)). & (\text{if } \frac{1}{2} \leq u \leq 1). \end{cases}$$

□

証明. コンデンス集合の射 $\tilde{f}'_{K \subset L} : \mathcal{F}_f^*(L) \rightarrow \mathcal{F}_f^*(K) \times_{\mathcal{G}^*(K)} \mathcal{G}^*(L)$ が束であることを示す. 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{F}_f^*(L) \\ \downarrow & \searrow \gamma & \downarrow \tilde{f}'_{K \subset L} \\ \Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{F}_f^*(K) \times_{\mathcal{G}^*(K)} \mathcal{G}^*(L) \end{array}$$

($[0, 1]_1$ は閉区間 $[0, 1]$ のコピーである. この後現れる閉区間と区別するため, 右下に添え字を置いている.) K の十分小さい開近傍 U および L の十分小さい開近傍 V で, $U \subset V$ を満たすものにとって, 次の図式を考えてよい.

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{n-1} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \mathcal{F}_f^*(V) \\ \downarrow & & \downarrow \tilde{f}'_{U \subset V} \\ \Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \mathcal{F}_f^*(U) \times_{\mathcal{G}^*(U)} \mathcal{G}^*(V) \end{array}$$

$\mathcal{F}_f^*(V) = \mathcal{F}^*(V) \times_{\mathcal{G}^*(V)} \mathcal{G}^*(V)^{[0,1]_2}$ より, $\tilde{\alpha} : \Delta^{n-1} \rightarrow \mathcal{F}_f^*(V)$ は, 次の α^1 と α^2 を用いて $\tilde{\alpha} = \alpha^1 \times \alpha^2$ と表せる.

$$\begin{aligned}\alpha^1 : \Delta^{n-1} &\rightarrow \mathcal{F}^*(V) \\ \alpha^2 : \Delta^{n-1} &\rightarrow \mathcal{G}^*(V)^{[0,1]_2}.\end{aligned}$$

($[0,1]_2$ は閉区間 $[0,1]$ のコピーである. 閉区間 $[0,1]_1$ と区別するため, 右下に添え字を置いている.) 同様に $\tilde{\beta}$ も分解する. まず, 次の β^1 と β^2 を用いて $\tilde{\beta} = \beta^1 \times \beta^2$ と表せる.

$$\begin{aligned}\beta^1 : \Delta^{n-1} \times [0,1]_1 &\rightarrow \mathcal{F}_f^*(U) \\ \beta^2 : \Delta^{n-1} \times [0,1]_1 &\rightarrow \mathcal{G}^*(V).\end{aligned}$$

β^1 はさらに, 次の β^{11} と β^{12} を用いて $\beta^1 = \beta^{11} \times \beta^{12}$ と表せる.

$$\begin{aligned}\beta^{11} : \Delta^{n-1} \times [0,1]_1 &\rightarrow \mathcal{F}^*(U) \\ \beta^{12} : \Delta^{n-1} \times [0,1]_1 &\rightarrow \mathcal{G}^*(U)^{[0,1]_2}\end{aligned}$$

台関数 $\phi : V \rightarrow [0,1]$ で, $\text{supp}(\phi) \subset U$ および K のある開近傍上で $\phi \equiv 1$ を満たすものをとる. $W = V - \text{supp}(\phi)$ と置く.

これらのデータを用いて, これから次の射 $\gamma_1^1, \gamma_2^1, \gamma_1^2$ および γ_2^2 を, $\alpha^1, \alpha^2, \beta^{11}, \beta^{12}$ および β^2 を用いて構成する.

$$\begin{aligned}\gamma_1^1 : \Delta^{n-1} \times [0,1]_1 &\rightarrow \mathcal{F}^*(U) \\ \gamma_2^1 : \Delta^{n-1} \times [0,1]_1 &\rightarrow \mathcal{F}^*(W) \\ \gamma_1^2 : \Delta^{n-1} \times [0,1]_1 &\rightarrow \mathcal{G}^*(U)^{[0,1]_2} \\ \gamma_2^2 : \Delta^{n-1} \times [0,1]_1 &\rightarrow \mathcal{G}^*(W)^{[0,1]_2}\end{aligned}$$

補題 3.2.14 でとった $\Sigma \hookrightarrow [0,1]_1 \times [0,1]_2$ の強変位レトラクション $R_u : [0,1]_1 \times [0,1]_2 \rightarrow [0,1]_1 \times [0,1]_2$ をとる. $\{0\} \hookrightarrow [0,1]_1$ の強変位レトラクション $r_u : [0,1]_1 \rightarrow [0,1]_1$ が $R_u(s,0) = (r_u(s),0)$ によって定まる. 連続写像 $\psi : \Delta^{n-1} \times V \times [0,1]_1 \rightarrow \Delta^{n-1} \times V \times [0,1]_1$ を $\psi(p,x,s) = (p,x,r_{1-\phi(x)}(s))$ によって定める. ψ は V 上の (集合に値を持つ) 前層の射 $\mathcal{F}^\square[\Delta^{n-1} \times [0,1]_1]_V \rightarrow \mathcal{F}^\square[\Delta^{n-1} \times [0,1]_1]_V$ を導く. 層化関手により, これは V 上の (集合に値を持つ) 層の射 $\tilde{\psi} : \mathcal{F}^*[\Delta^{n-1} \times [0,1]_1]_V \rightarrow \mathcal{F}^*[\Delta^{n-1} \times [0,1]_1]_V$ を導く. 各開集合 $V' \subset V$ に対し, $\mathcal{F}[\Delta^{n-1} \times [0,1]_1](V')$ の各元は射 $\Delta^{n-1} \times [0,1]_1 \rightarrow \mathcal{F}^*(V')$ と一対一に対応する. この対応により, $\gamma_1^1 = \tilde{\psi}(\beta^{11})$ が定まる.

また, $\gamma_2^1 = \alpha^1|_W \circ pr$ が定まる. (ただし, $\alpha^1|_W$ と pr はそれぞれ合成射 $\Delta^{n-1} \xrightarrow{\alpha^1} \mathcal{F}^*(V) \rightarrow \mathcal{F}^*(W)$ と標準的射影 $\Delta^{n-1} \times W \times [0,1]_1 \rightarrow \Delta^{n-1} \times W$ である.)

連続写像 $\Psi : \Delta^{n-1} \times V \times [0,1]_1 \times [0,1]_2 \rightarrow \Delta^{n-1} \times V \times [0,1]_1 \times [0,1]_2$ を $\Psi(p,x,s,t) = (p,x,R_{1-\phi(x)}(s,t))$ によって定める. 先ほどと同様に, Ψ は V 上の (集合に値を持つ) 層の射 $\tilde{\Psi} : \mathcal{G}^*[\Delta^{n-1} \times [0,1]_1 \times [0,1]_2]_V \rightarrow \mathcal{G}^*[\Delta^{n-1} \times [0,1]_1 \times [0,1]_2]_V$ を導く. これにより $\gamma_1^2 = \tilde{\Psi}(\beta^{12})$ が定まる.

ν_1 と ν_2 を次のように定義する.

$$\begin{aligned}\nu_1 : \Delta^{n-1} \times \{0\} \times [0,1]_2 &\xrightarrow{\cong} \Delta^{n-1} \times [0,1]_2 \xrightarrow{\alpha^2} \mathcal{G}^*(W) \\ \nu_2 : \Delta^{n-1} \times [0,1]_1 \times \{1\} &\xrightarrow{\cong} \Delta^{n-1} \times [0,1]_1 \xrightarrow{\beta^2} \mathcal{G}^*(W).\end{aligned}$$

図式 $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ が可換であることから, $\Delta^{n-1} \times W \times \{0\} \times \{1\}$ 上で $\nu_1 = \nu_2$ である. よってこれは射 $\nu: \Delta^{n-1} \times W \times \Sigma \rightarrow \mathcal{G}^*(W)$ を定める. これにより $\gamma_2^2 = \nu \circ (id \times R_1)$ が定まる.

γ_1^1 と γ_1^2 は射 $\gamma_1: \Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 \rightarrow \mathcal{F}_f^*(U)$ を導く. γ_2^1 と γ_2^2 は射 $\gamma_2: \Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 \rightarrow \mathcal{F}_f^*(W)$ を導く. γ_1 と γ_2 は $U \cap W$ 上で貼り合い, 射 $\tilde{\gamma}: \Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 \rightarrow \mathcal{F}_f^*(V)$ を導く. $\tilde{\gamma}$ は図式 (α, β) のリフト γ を導く. 以上より $J_{\text{Cond}} \vdash \tilde{f}'_{KCL}$ である. これは $\tilde{f}'$ が可撓拡張であることを意味する. $\square$

3.2.2 ABC 前束構造

定義 3.2.15 (A. Radulescu-Banu [19]). $\mathcal{C}$ は圏とする. $\mathcal{C}$ 上の ABC 前束構造 (*Anderson-Brown-Cisinski prefibration structure*)(W, Fib) とは, 弱同値と呼ばれる射のクラス W と, 束と呼ばれる射のクラス Fib の組であって, 次の公理を満たすもののことである. (ただし, クラス $\text{Fib} \cap W$ に属する射を非輪状束と呼ぶ.)

1. $\mathcal{C}$ は終対象 $\mathbf{1}$ を持つ. (モデル圏と同様, $X \rightarrow \mathbf{1}$ が束であるような対象 X を束対象と呼ぶ.)
2. W と Fib は射の合成について閉じている.
3. 任意の同型射は弱同値であり, 終域が束対象である同型射は非輪状束である.
4. 三つの射 f, g および $g \circ f$ のうち二つが弱同値ならば, 残りの一つも弱同値である.
5. Y と Y' を束対象とし, $f: X \rightarrow Y$ を束とする. このとき, 任意の射 $Y' \rightarrow Y$ に対し f の引き戻し $f': X' \rightarrow Y'$ が存在し, このような f' は束である. さらに f が非輪状束でもあるならば f' も非輪状束である.
6. 任意の射 f は, e が弱同値かつ p が束である分解 $f = p \circ e$ を持つ.

ABC 前束構造 (W, Fib) がさらに次を満たすとき, これを ABC 束構造 (*Anderson-Brown-Cisinski fibration structure*) と呼ぶ.

7. 束の集合 $\{f_i: X_i \rightarrow Y_i\}_i$ で各終域 (*i.e.* 各 Y_i) が束対象であるものが存在した時, 積対象 $\prod_i X_i$ および $\prod_i Y_i$ が存在し, $\prod f_i: \prod X_i \rightarrow \prod Y_i$ は束である. (特に $Y_i = \mathbf{1}$ の場合を考えれば, 束対象の積は束対象である.) さらに各 f_i が非輪状束であれば, $\prod f_i$ も非輪状束である.
8. 束による可算逆列

$$\dots \xrightarrow{f_2} X_2 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_0} X_0$$

に対し, 逆極限 $\varprojlim X_i$ が存在し, $\varprojlim X_i \rightarrow X_0$ は束である. さらに, 任意の f_i が非輪状束であれば, $\varprojlim X_i \rightarrow X_0$ も非輪状束である.

注意 3.2.16. 弱同値のクラスは $\mathcal{C}$ の部分圏である．一方、束のクラス $\mathbf{Fib}$ が部分圏である保証はない． $f : X \rightarrow Y$ が束であったとしても、 id_X および id_Y が束である保証はないからである． Y が束対象であれば引き戻しの公理から id_Y は束であり、同様に id_X も束になる．

ABC(Anderson-Brown-Cisinski) とは D. W. Anderson [1], K. S. Brown [2], ならびに D.-C. Cisinski の名前に由来する．Brown [2] は単体的層のホモトピー論などを扱うため、任意の対象が束対象である場合に限ってモデル構造を一般化した．その後、Anderson [1] は Brown の定義が一般の場合に拡張できる事実について言及したが、彼は詳しい理論を説明する前に数学者を引退してしまった．Anderson の失われた理論は、Cisinski の手によって再び日の目を見ることになる．A. Radulescu-Banu [19] の論文が現在のところの完成版のようである．

連続層の圏 $Sh(B; \mathbf{Cond})$ が ABC 前束構造を持つことを示そう．

定理 3.2.17 (Y.). B は強局所可縮な正規ハウスドルフ空間とする．このとき、連続層の圏 $Sh(B; \mathbf{Cond})$ 上の ABC 前束構造であって、次を満たすものが存在する．

B 上の連続層の間の任意の射 $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対し、次を満たす．

- f が弱同値である
 $\Leftrightarrow f$ は *stalkwise* に弱同値である．
- f は束である
 $\Leftrightarrow f$ は可撓である．

特に、 B 上の任意の連続層 $\mathcal{F}$ に対し、次を満たす．

- $\mathcal{F}$ が束対象である
 $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ は可撓層である

証明．定義 3.2.15 の公理 1. から 6. を確かめればよい．公理 1. から 5. は定理 3.1.9 から明らかである．あとは 6. を確かめればよい．

定理 3.1.9 より、次の図式をモデル圏 $PSh_*(\mathcal{U}_B; \mathbf{Cond})$ に埋め込んで考える．(モデル構造は各点可撓モデル構造を入れている．)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{F}_f^* & & \\
 & \nearrow \simeq & \uparrow & \searrow \tilde{f}' & \\
 \mathcal{F}^* & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G}^* \\
 \uparrow \simeq & & \uparrow & & \uparrow \simeq \\
 & \nearrow & \mathcal{F}_f^* \times_{\mathcal{G}^*} \mathcal{G} & \searrow & \\
 \mathcal{F} & \xrightarrow{\quad f \quad} & & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G}
 \end{array}$$

補題 3.2.7 より, $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ および $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^*$ は stalkwise に弱同値である. 補題 3.2.13 より, f の可撓積 $\tilde{f}'$ は可撓である. $\mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{F}_f^*$ は sectionwise に弱同値である. よってこれは stalkwise に弱同値である. モデル圏 $PSH_*(\mathcal{W}_B; \mathbf{Cond})$ は右正則 (束による弱同値の引き戻しは弱同値) だから, $\mathcal{F}_f^* \times_{\mathcal{G}^*} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}_f^*$ は stalkwise に弱同値である. よって, $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_f^* \times_{\mathcal{G}^*} \mathcal{G}$ は stalkwise に弱同値である. $\mathcal{F}_f^* \times_{\mathcal{G}^*} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ は可撓拡張の引き戻しなので, これも可撓である. よって $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_f^* \times_{\mathcal{G}^*} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ は f の求める分解である. 以上より公理 6. を満たすことが示された. よって, 連続層の圏 $Sh(B; \mathbf{Cond})$ が求める ABC 前束構造を持つことが示された. $\square$

4日目 弱可撓層と応用

4.1 弱可撓層

弱可撓層は Studer [23] によって岡-Grauert の原理を層理論的に取り扱うために導入された。

まず、コンパクト集合の組の弱可撓性を定義する。

定義 4.1.1. B を位相空間とし、 $\mathcal{F}$ を B 上の連続層とする。 B のコンパクト部分集合 $K, L \subset B$ の組 (K, L) が $\mathcal{F}$ に関する順序付き弱可撓 (*ordered weakly flexible*) 対であるとは、次の二つを満たすことを言う。

1. 次の引き戻し図式がホモトピー引き戻し図式となる。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(K \cup L) & \longrightarrow & \mathcal{F}(L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(K) & \longrightarrow & \mathcal{F}(K \cap L) \end{array}$$

2. $\mathcal{F}(K \cup L) \rightarrow \mathcal{F}(K)$ が Serre 束になる。

条件 2. の代わりに以下を満たすとき、 (K, L) は $\mathcal{F}$ に関する弱可撓 (*weakly flexible*) 対であると言う。

- 2'. 次の形の任意の図式に対し、斜めの射 $P \rightarrow \mathcal{O}(A \cup B)$ で、上三角を可換にし、下三角は P を固定するホモトピー同値を除いて可換になり、そのホモトピーは一様にいくらでも近いものをがとれるものが存在する。

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \longrightarrow & \mathcal{F}(K \cup L) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta^n \times [0, 1] & \xrightarrow{a} & \mathcal{F}(K) \end{array}$$

注意 4.1.2. B がハウスドルフ空間の時、上の条件 1. は、次の射が弱同値となることと同値である。

$$\mathcal{F}(K \cup L) \cong \mathcal{F}(K) \times_{\mathcal{F}(K \cap L)} \mathcal{F}(L) \rightarrow \mathcal{F}(K) \times_{\mathcal{F}(K \cap L)} \mathcal{F}(K \cap L)^{[0,1]} \times_{\mathcal{F}(K \cap L)} \mathcal{F}(L)$$

Studer [23] は弱可撓対として “ $\mathcal{C}$ -対” を採用することで、層理論的ホモトピー原理を岡-Grauert 理論へと応用しようとした。

注意 4.1.3. 順序付き弱可撓対の Studer [23] によるオリジナルの定義は、上記よりも強い定義となっている。上記の定義から Studer の定理をそのまま証明できるかどうかはわからないが、Stein 多様体論への応用を考えた場合、これで十分である。

次に、コンパクト集合の n -組に関する弱可撓性を定義する。

定義 4.1.4. B のコンパクト部分集合 $K_1, \dots, K_n \subset B$ の組 $(K_1, \dots, K_n)$ が (連続層 $\mathcal{F}$ に関する) 弱可撓繋ぎ (*weakly flexible string*)(*resp.* 順序付き弱可撓繋ぎ (*ordered weakly flexible string*)) であることを、 n に関して帰納的に、次のように定義する。

1. (K_1) は弱可撓繋ぎ (*resp.* 順序付き弱可撓繋ぎ) である。
2. (K_1, K_2) が弱可撓繋ぎ (*resp.* 順序付き弱可撓繋ぎ) であるとは、 (K_1, K_2) が弱可撓対 (*resp.* 順序付き弱可撓対) であることを言う。
3. $(K_1, \dots, K_n) (n \geq 3)$ が弱可撓繋ぎ (*resp.* 順序付き弱可撓繋ぎ) であるとは、 $(K_1 \cup \dots \cup K_{n-1}, K_n)$ が弱可撓対 (*resp.* 順序付き弱可撓対) であり、 $(K_1, \dots, K_{n-1})$ と $(K_1 \cap K_n, \dots, K_{n-1} \cap K_n)$ が弱可撓繋ぎ (*resp.* 順序付き弱可撓繋ぎ) であることを言う。

これで準備が整ったので、(順序付き) 弱可撓層を定義する。

定義 4.1.5 (Studer [23]). B を位相空間とし、 $\mathcal{F}$ を B 上の連続層とする。 $\mathcal{F}$ が弱可撓 (*weakly flexible*)(*resp.* 順序付き弱可撓 (*ordered weakly flexible*)) であるとは、 B の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して、 $\mathcal{U}$ を細分する局所有限な可算コンパクト被覆 $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で次を満たすものが存在することを言う。

- 任意の n に対し $(K_1, \dots, K_n)$ が $\mathcal{F}$ に関する弱可撓繋ぎ (*resp.* 順序付き弱可撓繋ぎ) である。
- $\{\text{Int}(K_n)\}_n$ は B の開被覆である。

(ただし、 Int は内部作用素である。)

注意 4.1.6. Studer [23] によるオリジナルの定義は、 $\{\text{Int}(K_n)\}_n$ が B を被覆することを要求していない。しかし、 $\mathcal{C}$ -対が弱可撓対として現れる場合は、これは自動的に満たされる。

上記の定義は Studer によるオリジナルの定義である。ここでは、さらに強い次の定義を用いる。

定義 4.1.7. $\mathcal{F}$ が全局所弱可撓 (*resp.* 全局所順序付き弱可撓) であるとは、 B の開基 $\mathcal{B}$ で、任意の開集合 $U \in \mathcal{B}$ に対し $\mathcal{F}|_U$ が弱可撓 (*resp.* 順序付き弱可撓) となるものが存在することとする。

例 4.1.8. $\mathcal{F}$ がハウスドルフ空間 B 上の可撓層ならば, 任意のコンパクト部分集合の組 (K, L) は順序付き弱可撓対である. よってさらに, 任意のコンパクト部分集合の n -組 $(K_1, \dots, K_n)$ は順序付き弱可撓繋ぎである.

B がさらに局所コンパクトかつパラコンパクトならば, 任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して, $\mathcal{U}$ を細分する局所有限な可算コンパクト被覆 $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で次を満たすものが存在する.

- $\{\text{Int}(K_n)\}_n$ は B の開被覆である.

特にこの時, B 上の可撓層は順序付き弱可撓層である. B がさらに遺伝的パラコンパクト (i.e. 任意の開集合がパラコンパクト) ならば, B 上の可撓層は全局所順序付き弱可撓層である. 例えば, 第二可算公理を満たす局所コンパクト・ハウスドルフ空間や, 局所コンパクト距離空間は上記すべての条件を満たす.

例 4.1.9. B を複素多様体とする. Stein 開集合を認容開集合とし, 正則領域による被覆と $\text{id} : U \rightarrow U$ を被覆とすることで B 上の G -位相が定まる. 岡写像 $E \rightarrow B$ の切断の層は, 上記の G -位相について全局所弱可撓である. (cf. [23])

注意 4.1.10. Studer [23] は弱可撓層が完備距離化可能空間に値を持つ場合に岡-Grauert の原理へ応用があることを示した. 一方, Studer は順序付き弱可撓層の応用について,

“Ordered flexibility is—in the context of Oka theory—most of times rather easy to show. Proofs shall be given elsewhere.”

と書いているが, Studer がどのような応用を考えているのか現時点ではよくわからない. (個人的な予想だが, 正則切断ではなく滑らかな切断の層への応用を考えているような気がする.) しかし, 岡写像 $E \rightarrow B$ の切断の層 $\mathcal{F}$ はおそらく順序付き弱可撓層にはならないと思われる. $\mathcal{F}(K \cup L) \rightarrow \mathcal{F}(K)$ が Serre 束ならば, 特に各弧状連結成分上で全射または空写像でなければならないが, これは期待できない. 実際, $\mathbb{C}^n$ の Stein 開集合は任意の境界点に対してその周りに拡張できない正則関数を持つことが知られている. (このような性質を持つ連結開集合を正則領域 (domain of holomorphy) と呼ぶ. 正則領域は擬凸領域と同値であり, Stein 多様体とは擬凸領域の一般化として定義されている.)

全局所弱可撓層を導入する理由は, 次の性質にある.

命題 4.1.11. $\mathcal{F}$ が以下のいずれかを満たすとする.

- 全局所順序付き弱可撓層である.
- 全局所弱可撓層で, 完備距離空間に値を持つ.

このとき, $\mathcal{F}$ はホモトピー層である.

証明. B の任意の開集合 U の局所有限な可算コンパクト被覆 $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で次を満たすものをとる.

- 任意の n に対し $(K_1, \dots, K_n)$ が $\mathcal{F}$ に関する (順序付き) 弱可撓繋ぎである.

- $\{\text{Int}(K_n)\}_n$ は U の開被覆である.

$L_n = K_0 \cup \dots \cup K_n$ とする. 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{F}(L_{n+1}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(L_n) \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{F}(L_0) = \mathcal{F}(K_0) \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 \prod_i^\infty \mathcal{F}(K_i) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \prod_i^{n+1} \mathcal{F}(K_i) & \longrightarrow & \prod_i^n \mathcal{F}(K_i) \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{F}(K_0) \\
 \Downarrow & & & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 \prod_{i,j=0}^\infty \mathcal{F}(K_i \cap K_j) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \prod_{i,j=0}^{n+1} \mathcal{F}(K_i \cap K_j) & \longrightarrow & \prod_{i,j=0}^n \mathcal{F}(K_i \cap K_j) \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{F}(K_0) \\
 \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

各列は差核であり, 各行は塔とその極限である. まず, 下二列は積の射影の列なので, **Cond** が正則モデル圏であることから, これは fibration の塔である. 各 n に対し $(K_1, \dots, K_n)$ が $\mathcal{F}$ に関する順序付き弱可撓繋ぎならば, 上行も fibration の塔である. よって, 各塔の極限は塔のホモトピー極限でもある. (順序付きでない場合も, 上行の極限はホモトピー極限である.) また, $(K_1, \dots, K_n)$ が $\mathcal{F}$ に関する弱可撓繋ぎであることから, 一番左以外の各列はホモトピー極限でもある. よって, 一番左列もホモトピー極限である. これは実際, 次のような計算からわかる.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(U) &\cong \varprojlim_n \mathcal{F}(L_n) \\
 &\simeq \text{holim}_{\leftarrow n} \mathcal{F}(L_n) \\
 &\simeq \text{holim}_{\leftarrow n} \text{holim}_{\leftarrow} \left[\prod_i^n \mathcal{F}(K_i) \rightrightarrows \prod_{i,j=0}^n \mathcal{F}(K_i \cap K_j) \rightrightarrows \dots \right] \\
 &\simeq \text{holim}_{\leftarrow} \text{holim}_{\leftarrow n} \left[\prod_i^n \mathcal{F}(K_i) \rightrightarrows \prod_{i,j=0}^n \mathcal{F}(K_i \cap K_j) \rightrightarrows \dots \right] \\
 &\simeq \text{holim}_{\leftarrow} \left[\prod_i^\infty \mathcal{F}(K_i) \rightrightarrows \prod_{i,j=0}^\infty \mathcal{F}(K_i \cap K_j) \rightrightarrows \dots \right]
 \end{aligned}$$

このような可算コンパクト被覆 $\{K_n\}_n$ は開被覆と共終なので, $\mathcal{F}(U)$ は $\mathcal{F}^+(U)$ に弱同値である. (ただし, ここではホモトピー (余) 極限を用いてプラス構成を定めている.) すなわち, $\mathcal{F}$ は $\mathcal{F}^+$ と弱同値である. これは $\mathcal{F}$ がホモトピー層であることを意味する. $\square$

コンデンス集合の圏 **Cond** に値を持つホモトピー層は, 単体的集合の圏 **sSet** に値を持つホモトピー層を導く. また, 任意のコンデンス集合は **Cond** 上の束対象であるため, 上記

のように導かれた $\mathbf{sSet}$ に値を持つホモトピー層の値域は Kan 複体の圏に値を持つ. Kan 複体の圏は ∞ -垂群の圏と圏同値であり, Kan 複体に値を持つ B 上のホモトピー層は B 上の ∞ -層と見なすことができる.

定義 4.1.12. 位相空間 X の被覆次元とは, 次を満たす自然数 n のうち最小のもののことである.

X の任意の有限開被覆 $\mathcal{U}$ に対し, その有限細分 $\mathcal{V}$ で, 任意の点 $x \in X$ に対し $\#\{V \in \mathcal{V} : x \in V\} \leq n+1$ を満たすものが存在する.

(遺伝的パラ) コンパクト Hausdorff 空間 X が n 以下の局所次元を持つとは, 任意の開集合のルベーク次元が n 以下であることとする. ある自然数 n に対して n 以下の局所次元を持つとき, 局所有限次元を持つとする.

上記の開基 $\mathcal{B}$ に対し, $\mathbf{Cond} \rightarrow \mathbf{sSet}$ がフィルター余極限を保ち, 弱同値を創出することにより, 次が成り立つ.

命題 4.1.13. Hausdorff 空間 B はコンパクト空間による増大列 $K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset B$ により $B = \bigcup K_n$ と表され, 各 K_n が局所有限次元を持つとする. $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ は, $\mathbf{Cond}$ に値を持つ B 上のホモトピー層の間の射とする. さらに $\mathcal{F}(B) \cong \varprojlim \mathcal{F}(K_n)$ および $\mathcal{G}(B) \cong \varprojlim \mathcal{G}(K_n)$ であるとする. このとき, f が stalkwise に弱ホモトピー同値ならば, $f_B : \mathcal{F}(B) \rightarrow \mathcal{G}(B)$ は弱ホモトピー同値である.

証明. 関手 $\mathbf{Cond} \rightarrow \mathbf{sSet}$ を G と置く. このとき, $G(f) : GF \rightarrow GG$ は ∞ -層の間の射とみなせる. G がフィルター余極限を保つことにより, 任意の点 $x \in B$ に対し $G(f_x)$ と $G(f)_x$ は同型である. よって, f が stalkwise に弱ホモトピー同値ならば, $G(f)$ は stalkwise に弱ホモトピー同値である. K_n が局所有限次元を持つことから, K_n 上の ∞ -層の圏 $\mathbf{Sh}^\infty(K_n)$ の局所ホモトピー次元は有限である ([?, Corollary 7.2.3.7.]). よって $\mathbf{Sh}^\infty(K_n)$ は十分な点 (enough points) を持つ ([?, Corollary 7.2.1.17.]). 特に $G(f)_{K_n}$ は弱ホモトピー同値である. 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccc} GF(B) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & GF(K_{n+1}) & \longrightarrow & GF(K_n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow GF(K_0) \\ \downarrow & & & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ GG(B) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & GG(K_{n+1}) & \longrightarrow & GG(K_n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow GG(K_0) \end{array}$$

各行はホモトピー極限であり, 弱同値を保つ. すなわち $G(f)_B : GF(B) \rightarrow GG(B)$ は弱ホモトピー同値である. G は弱同値を創出するので, $f_B : \mathcal{F}(B) \rightarrow \mathcal{G}(B)$ は弱ホモトピー同値である. $\square$

直ちに次を得る.

系 4.1.14. Hausdorff 空間 B はコンパクト空間による増大列 $K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset B$ により $B = \bigcup K_n$ と表され, 各 K_n が局所有限次元を持つとする. B 上の連続層 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ が以下のいずれかを満たすとする.

- 全局所順序付き弱可撓層である.
- 全局所弱可撓層で, 完備距離空間に値を持つ.

さらに $\mathcal{F}(B) \cong \varprojlim \mathcal{F}(K_n)$ および $\mathcal{G}(B) \cong \varprojlim \mathcal{G}(K_n)$ を満たすとする. このとき, 射 $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が *stalkwise* に弱ホモトピー同値ならば, $f_B: \mathcal{F}(B) \rightarrow \mathcal{G}(B)$ は弱ホモトピー同値である. 特に, B が局所コンパクトかつ遺伝的パラコンパクトなハウスドルフ空間で上記の増大列 $\{K_n\}$ を持つならば, 可撓層の間の射に対して上記の同値が成り立つ.

4.2 応用

複素多様体 X に対し, X 上の正則関数環を $\mathcal{O}(X)$ と書く. $\mathcal{O}(X)$ はコンパクト開位相を入れると位相環になる. この位相に関する収束は広義一様収束である. また, X の部分集合 A に対し, A の周りで定義された正則関数の芽の環を $\mathcal{O}(A)$ と書く.

Stein 多様体

Stein 多様体とは, 古典的な多変数複素解析の分野でよく調べられている正則領域 (domain of holomorphy) の多様体論への一般化である. また, コンパクト Kähler 多様体が射影代数多様体の類似であるとするなら, Stein 多様体はアフィン代数多様体の類似である.

定義 4.2.1. 複素多様体 X が正則分離的 (*holomorphically separable*) であるとは, 任意の異なる二点 $x, y \in X$ に対し, X 上の正則関数 f で $f(x) \neq f(y)$ を満たすものが存在することを言う. 複素多様体 X が正則凸 (*holomorphically convex*) であるとは, 任意の離散部分集合 $\Gamma \subset X$ に対し, X 上の正則関数 f で $f(\Gamma) \subset \mathbb{C}$ が非有界となるものが存在することを言う. 正則分離可能かつ正則凸である複素多様体を *Stein 多様体* と言う.

定理 4.2.2. 複素多様体 X に対し, 以下は同値である.

1. X は *Stein* 多様体である.
2. X は正則分離的かつ正則凸である.
3. X は皆既的 (*exhaustive*)¹ な強多重劣調和関数を持つ.
4. X は十分次元の高いアフィン空間 $\mathbb{C}^n$ の中への閉埋め込みを持つ.
5. X は *Cartan* の定理 B を満たす.

¹exhaustion を「皆既」とする訳は大沢 [24] に准ずる. 英和辞典などを引くと, exhaustion は「疲弊」「疲労」「枯渇」といった意味として出てくるが, 元々は「徹底的に取り尽くされること」を意味している. 「井戸の水が徹底的に取り尽くされ, とうとう枯渇する」イメージである. 例えば, グラフの面積を求める「取り尽くし法 (method of exhaustion)」などにこの単語が使われているほか, 所謂「場合分け」と呼ばれる証明法は英語では「総当たりによる証明 (proof by exhaustion)」などと呼ばれている.

例 4.2.3. Riemann 面が Stein であるとき, かつその時に限り, Riemann 面は開である.

例 4.2.4. Stein 多様体の直積は Stein 多様体である.

正則凸性には異なる特徴づけもある.

定義 4.2.5. X は複素多様体, A は X の部分集合とする. A の部分集合 K の $\mathcal{O}(A)$ -凸包 $\widehat{K}_{\mathcal{O}(A)}$ は次のように定義される.

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}(A)} = \{x \in A : |f(x)| \leq \|f\|_K (\forall f \in \mathcal{O}(A))\}$$

A が文脈上明らかな場合, K の $\mathcal{A}(A)$ -凸包を単に $\widehat{K}$ とも書く. K が $\mathcal{O}(A)$ -凸であるとは, $K = \widehat{K}_{\mathcal{O}(A)}$ を満たすことを言う.

命題 4.2.6. 複素多様体 X に対し, 以下は同値である.

1. X は正則凸である.
2. 任意の離散部分集合 $\Gamma \subset X$ に対し, X 上の正則関数 f で $f(\Gamma) \subset \mathbb{C}$ が非有界となるものが存在する.
3. 任意のコンパクト部分集合 $K \subset X$ に対し, K の $\mathcal{O}(X)$ -凸包 $\widehat{K}_{\mathcal{O}(X)}$ はコンパクトになる.

証明. 1. $\Leftrightarrow$ 2. は定義より明らか.

2. $\Rightarrow$ 3.

任意のコンパクト集合 $K \subset M$ をとる. $\widehat{K}$ がコンパクトでないならば, 無限離散部分集合 $\Gamma \subset \widehat{K}$ がとれる. 2. より $f(\Gamma)$ が非有界となる M 上の正則関数 f が存在するため, $\Gamma \not\subset \widehat{K}$ となり矛盾.

3. $\Rightarrow$ 2.

コンパクト集合の増大列 $K_0 \subset \text{int}(K_1) \subset K_1 \subset \cdots \subset M$ で, $M = \bigcup_n K_n$ を満たすものが存在する. 3. より, K_n を $\mathcal{A}(X)$ -凸包 $\widehat{K}_n$ で置き換えてよい.

無限離散部分集合 $\Gamma \subset M$ を任意にとる. $f(\Gamma)$ が非有界となる M 上の正則関数 f を構成すればよい. 可算点列 $\{p_n\} \subset \Gamma$ を, $p_n \in \Gamma - \widehat{K}_n$ となるように選ぶ. $p_n \notin \widehat{K}_n$ より, $|g_n(p_n)| > \max_{q \in \widehat{K}_n} |g_n(q)|$ を満たす M 上のある正則関数 g_n が存在する. $|g_n(p_n)| > t > \max_{q \in \widehat{K}_n} |g_n(q)|$ を満たす実数 t をとる. g_n を t で割り, $|g_n(p_n)| > 1$ かつ $\max_{q \in \widehat{K}_n} |g_n(q)| < 1$ としてよい.

帰納的に関数列 $\{f_n\}$ を定義する. 十分大きい自然数 k で $f_n = g_n^k$ とすれば, $|f_n(p_n)| > n + \sum_{i=1}^{n-1} |f_i|$ かつ $\max_{q \in \widehat{K}_n} |f_n(q)| < \frac{1}{2^n}$ としてよい. $f = \sum_n f_n$ と置く. 各 $\text{int}(K_n)$ 上で部分和は関数列としてコーシー列をなすので, ある正則関数 f に収束する. よって, M 上の正則関数 f が定義できる. 一方, $|f(p_n)| \rightarrow \infty$ より, $f(\Gamma)$ は非有界である. $\square$

命題 4.2.7 (cf. [12, 4.1. Lemma]). $f : X \rightarrow Y$ は複素多様体の間の正則写像とする. X は Stein 多様体で, $U \subset Y$ は Stein 開集合とする. このとき, $f^{-1}(U)$ は Stein 開集合である. 特に, Stein 開集合同士の共通部分は Stein である.

証明. X が正則分離的であることから, $f^{-1}(U)$ も正則分離的である. $f^{-1}(U)$ が正則凸であることを示せばよい.

任意のコンパクト部分集合 $K \subset f^{-1}(U)$ をとる. $\mathcal{O}(f^{-1}(U))$ -凸包 $\widehat{K}_{\mathcal{O}(f^{-1}(U))}$ がコンパクトになることを示す. X が正則凸であることから, $\mathcal{O}(X)$ -凸包 $\widehat{K}_{\mathcal{O}(X)}$ はコンパクトである. よって, $\widehat{K}_{\mathcal{O}(f^{-1}(U))}$ が $\widehat{K}_{\mathcal{O}(X)}$ の中で閉集合であればよい. $f(K)$ はコンパクトだから, U が正則凸であることより, $\mathcal{O}(U)$ -凸包 $\widehat{f(K)}_{\mathcal{O}(U)}$ はコンパクトである. 特に $\widehat{f(K)}_{\mathcal{O}(U)}$ は Y の閉集合である. よって, $f^{-1}(\widehat{f(K)}_{\mathcal{O}(U)})$ は X の閉集合である. 一方, $\widehat{K}_{\mathcal{O}(f^{-1}(U))} \subset f^{-1}(\widehat{f(K)}_{\mathcal{O}(U)})$ である. 実際, 任意の点 $x \in \widehat{K}_{\mathcal{O}(f^{-1}(U))}$ と任意の正則関数 $h \in \mathcal{O}(U)$ をとると, $|h(f(x))| \leq \|h \circ f\|_K = \|h\|_{f(K)}$ であるので, $f(x) \in \widehat{f(K)}_{\mathcal{O}(U)}$ である. $f^{-1}(\widehat{f(K)}_{\mathcal{O}(U)}) \subset f^{-1}(U)$ であることから, $\widehat{K}_{\mathcal{O}(f^{-1}(U))}$ の X 内部における閉包は $f^{-1}(U)$ 内部における閉包と一致する. 凸包の定義より, $\widehat{K}_{\mathcal{O}(f^{-1}(U))}$ は $f^{-1}(U)$ の中で閉集合であるから, $\widehat{K}_{\mathcal{O}(f^{-1}(U))}$ は X の中で閉集合である. よって, $\widehat{K}_{\mathcal{O}(f^{-1}(U))}$ は, コンパクト集合 $\widehat{K}_{\mathcal{O}(X)}$ の中で閉集合であるので, コンパクトである. 以上より $f^{-1}(U)$ は正則凸である. $\square$

命題 4.2.8. X は複素多様体とする. X の Stein 開集合全体の集合は X の開基をなす.

証明. 多重円盤が Stein であることから明らか. $\square$

C-対

定義 4.2.9. X は複素多様体とする. コンパクト部分集合 $K \subset X$ が Stein であるとは, K は Stein 近傍基を持つことを言う. すなわち, K が Stein であるとは, K の任意の開近傍 U に対し, $K \subset V \subset U$ を満たす Stein 開集合 V が存在することを言う.

定義 4.2.10 ([5, Definition 6.7.1.]). X は複素多様体とする. C-対 (C-pair) とは, コンパクト部分集合 $A, B \subset X$ の組 (A, B) であって, 次を満たすもののことである.

- $A, B, A \cup B$ はすべて Stein コンパクト集合である.
- $A - B$ の閉包と $B - A$ の閉包は交わりを持たない.
- $A \cap B$ は $A(B)$ -凸である.

補題 4.2.11 (岡の縫付 (Heftungs²) 補題 [5, Proposition 6.7.2.]). X は複素多様体とし, (A, B) は C-対とする. (A, B) は X 上の正則関数の層 $\mathcal{O}$ に関する弱可撓対である. さらに X が Stein 多様体ならば, 層 $\mathcal{O}$ は弱可撓層である.

注意 4.2.12. 岡の縫付補題 (の簡単な場合) は次のように言及されることが多い.

²ドイツ語

$\mathcal{C}$ -対 (A, B) に対し, 以下の図式を考える. ただし, P は任意のコンパクト Hausdorff 空間で, P_0 は P の閉部分集合とする.

$$\begin{array}{ccc} P_0 & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O}(A \cup B) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ P & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O}(A) \times_{\mathcal{O}(A \cap B)} \mathcal{O}(A \cap B)^{[0,1]} \times_{\mathcal{O}(A \cap B)} \mathcal{O}(B) \end{array}$$

このとき, 斜めの射 $P \rightarrow \mathcal{O}(A \cup B)$ で, 上三角を可換にし, 下三角は P_0 を固定するホモトピー同値を除いて可換になる物が存在する. さらにこのとき, 次の図式を結ぶホモトピーは一様にいくらでも近いものにとってよい.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O}(A \cup B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}(A) \times_{\mathcal{O}(A \cap B)} \mathcal{O}(A \cap B)^{[0,1]} \times_{\mathcal{O}(A \cap B)} \mathcal{O}(B) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O}(A) \end{array}$$

これより, $\mathcal{O}$ に関する弱可撓対であるための条件のうち一つ目を (A, B) が満たすことは明らかである. 二つ目の条件を確かめるため, 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O}(A \cup B) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ P \times [0, 1] & \xrightarrow{a} & \mathcal{O}(A) \end{array}$$

これから示すことは, 斜めの射 $P \rightarrow \mathcal{O}(A \cup B)$ で, 上三角を可換にし, 下三角は P を固定するホモトピー同値を除いて可換になり, そのホモトピーは一様にいくらでも近いものをがとれるものが存在することである. $H_s : P \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{O}(A \cap B)$ を $H_s(p, t) = a(p, st)$ によって定めると, 次の図式が導かれる.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O}(A \cup B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & \mathcal{O}(A) \times_{\mathcal{O}(A \cap B)} \mathcal{O}(A \cap B)^{[0,1]} \times_{\mathcal{O}(A \cap B)} \mathcal{O}(B) \end{array}$$

ここで岡の縫付補題を適用すると, 斜めの射 $P \rightarrow \mathcal{O}(A \cup B)$ で条件を満たすものが存在する.

系 4.2.13. X は Stein 多様体とする. X 上の正則関数の層を $\mathcal{O}$, 連続関数の層を $\mathcal{C}$ と書く. $\mathcal{O}(X) \hookrightarrow \mathcal{C}(X)$ は弱ホモトピー同値である.

岡多様体

複素多様体 X と Y に対し, 正則写像 $X \rightarrow Y$ 全体の集合を $\mathcal{O}(X, Y)$ と書く. $\mathcal{O}(X, Y)$ はコンパクト開位相を入れると位相空間になる. また, X の部分集合 A に対し, A の周りで定義された正則写像の芽の集合を $\mathcal{O}(A, Y)$ と書く.

定義 4.2.14. 複素多様体 Y が岡であるとは, 任意のコンパクト凸集合 K に対し, 制限写像 $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, Y) \rightarrow \mathcal{O}(K, Y)$ は支配的 (*i.e.* 像が稠密) になることを言う.

例 4.2.15. 複素 Lie 群は岡である. さらに一般に, 複素等質空間は岡である.

例 4.2.16. $X \rightarrow Y$ は複素ファイバー束とする. Y が岡で, ファイバーが岡であるとき, 全空間 X も岡である. 特に, 岡多様体上の被覆空間や, 岡多様体と岡多様体の直積は岡である.

補題 4.2.17 (岡の縫付補題 [5, Proposition 6.7.2.]). X は複素多様体, Y は岡多様体とし, (A, B) は $\mathcal{C}$ -対とする. (A, B) は X 上の正則写像の層 $\mathcal{O}(-, Y)$ に関する弱可撓対である. さらに X が *Stein* 多様体ならば, 層 $\mathcal{O}(-, Y)$ は弱可撓層である.

系 4.2.18. X は *Stein* 多様体, Y は岡多様体とする. Y に値を持つ X 上の正則写像の層を $\mathcal{O}(-, Y)$, 連続写像の層を $\mathcal{C}(-, Y)$ と書く. $\mathcal{O}(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ は弱ホモトピー同値である.

関連図書

- [1] D. W. Anderson. Fibrations and geometric realizations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84(5):765–788, 09 1978.
- [2] Kenneth S. Brown. Abstract homotopy theory and generalized sheaf cohomology. *Transactions of the American Mathematical Society*, 186:419–458, 1973.
- [3] Michael Cole. Mixing model structures. *Topology and its Applications*, 153(7):1016–1032, 2006.
- [4] Yakov Eliashberg and Nikolai M Mishachev. *Introduction to the h-principle*. Number 48. American Mathematical Soc., 2002.
- [5] Franc Forstnerič. *Stein manifolds and holomorphic mappings*. Springer, 2011.
- [6] Hans Grauert. Analytische faserungen über holomorph-vollständigen räumen. *Mathematische Annalen*, 135(3):263–273, Jun 1958.
- [7] M Gromov. A topological technique for the construction of solutions of differential equations and inequalities. *Intern. Congr. Math.(Nice 1970)*, 2:221–225, 1971.
- [8] Misha Gromov. *Partial differential relations*, volume 9. Springer Science & Business Media, 2013.
- [9] Morris W Hirsch. Immersions of manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 93(2):242–276, 1959.
- [10] Philip S Hirschhorn. *Model categories and their localizations*. Number 99. American Mathematical Soc., 2009.
- [11] Mark Hovey. *Model categories*. Number 63. American Mathematical Soc., 2007.
- [12] Finnur Lárusson. Excision for simplicial sheaves on the stein site and gromov’s oka principle. *International Journal of Mathematics*, 14(02):191–209, 2003.
- [13] Saunders MacLane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory*. Springer Science & Business Media, 2012.

- [14] John Nash. C1 isometric imbeddings. *Annals of mathematics*, pages 383–396, 1954.
- [15] John Nash. The imbedding problem for riemannian manifolds. *Annals of mathematics*, pages 20–63, 1956.
- [16] Kiyosi Oka. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. III–Deuxième problème de Cousin. *Journal of Science of the Hiroshima University, Series A (Mathematics, Physics, Chemistry)*, 9(none):7 – 19, 1939.
- [17] Anthony Phillips. Submersions of open manifolds. *Topology*, 6(2):171–206, 1967.
- [18] Daniel G Quillen. *Homotopical algebra*, volume 43. Springer, 2006.
- [19] Andrei Radulescu-Banu. Cofibrations in homotopy theory. *arXiv preprint math/0610009*, 2006.
- [20] Stephen Smale. The classification of immersions of spheres in euclidean spaces. *Annals of mathematics*, pages 327–344, 1959.
- [21] Stephen Smale. A classification of immersions of the two-sphere. *Transactions of the American Mathematical Society*, 90(2):281–290, 1959.
- [22] Edwin Spanier et al. Quasi-topologies. *Duke Mathematical Journal*, 30(1):1–14, 1963.
- [23] Luca Studer. A homotopy theorem for oka theory. *Mathematische Annalen*, 378(3):1533–1553, 2020.
- [24] 大沢健夫. 多変数複素解析. 岩波書店, 2018.