Engel 多様体と接触構造

山崎 晃司　東京工業大学

2019 年 2 月 28 日〜3 月 1 日

目 次

0 導入

1889 年、4 次元多様体上の完全不可積分な 2 次元分布は局所的にすべて同型であることが、Engel によって示された。[3] この形の定理は、シンプレクティック幾何や接触幾何の世界ではよく知られている通り、いわゆる Darboux の定理と呼ばれるものである。この結果は、一般的に外微分形式系について知られていた Darboux の定理の中でも独立しており、不思議な結果ではあったものの、当時はそれほど注目されるまでには至らなかったようである。その後の 1993 年、Montgomery は、n 次元多様体上の階数 k の分布が “安定” ならば、不等式 $k(n-k) \leq n$ を満たさなければならないことを示した。[8] この不等式を具体的に解くと、$k=1$ または $k=n-1$ または $(n,k)=(4,2)$ となる。$(n,k)=(4,2)$ に相当するものが Engel 構造である。以来、Engel 多様体の研究は少しづつ増え始め、トポロジーの世界でいくつかの結果が示された。[9] [5] [1] [6] その後、Vogel によって Engel 構造の存在問題が解かれた [10] ことにより、Engel 多様体は大きく注目されることとなった。近年では h-原理が発見される [2] など、今後の発展が期待される対象である。

1 偶接触構造

1.1 定義と同値な特徴づけ

定理 1.1.1. V は m 次元ベクトル空間、ω は V 上の交代双線形形式とする。このとき、V の基底 $u_1, \cdots, u_k, e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_n$ $(m = k+2n)$ で、$\omega = e_1^* \wedge f_1^* + \cdots + e_n^* \wedge f_n^*$ と表せるものが存在する。

証明. 初等的な線形代数なので省略する。[13] などを参照。 □

系 1.1.2. V は $2n$ 次元ベクトル空間、ω は V 上の交代双線形形式とする。以下は同値である。

(1) $V \to V^*; v \mapsto \omega(v, \cdot)$ が全単射である。

(2) V の基底 $e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_n$ で、$\omega = e_1^* \wedge f_1^* + \cdots + e_n^* \wedge f_n^*$ と表せるものが存在する。

(3) $\omega^n (= \omega \wedge \cdots \wedge \omega) \neq 0$ である。

系 1.1.3. V は $2n-1$ 次元ベクトル空間、ω は V 上の交代双線形形式とする。以下は同値である。

(1) $V \to V^*; v \mapsto \omega(v, \cdot)$ の階数が $2n-2$ である。

(2) V の基底 $u_1, e_1, \cdots, e_{n-1}, f_1, \cdots, f_{n-1}$ で、$\omega = e_1^* \wedge f_1^* + \cdots + e_{n-1}^* \wedge f_{n-1}^*$ と表せるものが存在する。

(3) $\omega^{n-1} \neq 0$ である。

証明. (1) ⇔ (2) ⇔ (3) □

定義 1.1.4 (接触多様体)**.** M は $2n+1$ 次元多様体とする。

M 上の接触形式 *(contact form)* とは、M 上の一次微分形式 α であって、いたる所で $\alpha \wedge d\alpha^n \neq 0$ を満たすもののことである。

M 上の接触構造 *(contact structure)* とは、接束の部分束 $\xi \subset TM$（これを分布 *(distribution)* という）であって、階数は $2n$ で、局所的に接触形式 α を用いて $\xi = Ker(\alpha)$ と書けるもののことである。

奇数次元多様体 M と M 上の接触構造 ξ の組 (M, ξ) を接触多様体という。

$(M_1, \xi_1), (M_2, \xi_2)$ は接触多様体とする。接触準同型 $f : (M_1, \xi_1) \to (M_2, \xi_2)$ とは、局所微分同相写像 $f : M_1 \to M_2$ であって、各点で $df(\xi_1) = \xi_2$ となるもののことである。

命題 1.1.5. M は $2n+1$ 次元多様体、α は M 上の一次微分形式とする。さらに、$\xi \overset{\mathrm{def}}{=} Ker(\alpha)$ とする。以下は同値である。

(1) ξ は接触構造である。

(2) α は接触形式である。

(3) いたる所で $d\alpha^n|_\xi \neq 0$ である。

(4) $\xi \to \xi^*; v \mapsto d\alpha(v, \cdot)$ が全単射である。

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4)

証明はすべて簡単だが、今後の議論にかかわるので (1) $\Leftrightarrow$ (2) のみ示す。(1) $\Leftarrow$ (2) は明らか。(1) $\Rightarrow$ (2) を示す。

ξ が接触構造であったとすると、局所的に接触形式 β を用いて $\xi = Ker(\beta)$ と書ける。ξ の定義より $Ker(\alpha) = \xi = Ker(\beta)$ である。よって、いたる所 0 にならない関数 h を用いて $\alpha = h\beta$ と書ける。この時、$\alpha \wedge d\alpha^n = h\beta \wedge (dh \wedge \beta + hd\beta)^n = h^{n+1}\beta \wedge d\beta^n \neq 0$ □

注意 1.1.6. M は 3 次元多様体、$\xi \subset TM$ は階数 2 の分布とする。

ξ が接触構造であるための必要十分条件は、いたる所で $d\alpha|_\xi \neq 0$ なる局所的に定義された微分形式 α の核となることである。よく知られた公式 $d\alpha(X, Y) = d(\alpha(Y))(X) - d(\alpha(X))(Y) - \alpha([X, Y])$ により、上記の条件は $\xi + [\xi, \xi] = TM$ と同値である。

定義 1.1.7 (偶接触多様体)**.** E は $2n$ 次元多様体とする。

E 上の偶接触形式 *(even contact form)* とは、E 上の一次微分形式 α であって、いたる所で $\alpha \wedge d\alpha^{n-1} \neq 0$ を満たすもののことである。

E 上の偶接触構造 *(even contact structure)* とは、階数 $2n-1$ の分布 $\mathcal{E} \subset TM$ であって、局所的に偶接触形式 α を用いて $\mathcal{E} = Ker(\alpha)$ と書けるもののことである。

偶数次元多様体 E と E 上の偶接触構造 $\mathcal{E}$ の組 $(E, \mathcal{E})$ を偶接触多様体という。

$(E_1, \mathcal{E}_1), (E_2, \mathcal{E}_2)$ は偶接触多様体とする。偶接触準同型 $f : (E_1, \mathcal{E}_1) \to (E_2, \mathcal{E}_2)$ とは、局所微分同相写像 $f : E_1 \to E_2$ であって、各点で $df(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_2$ となるもののことである。

命題 1.1.8. E は $2n$ 次元多様体、α は E 上の一次微分形式とする。さらに、$\mathcal{E} \overset{\mathrm{def}}{=} Ker(\alpha)$ とする。以下は同値である。

(1) $\mathcal{E}$ は偶接触構造である。

(2) α は偶接触形式である。

(3) いたる所で $d\alpha^{n-1}|_{\mathcal{E}} \neq 0$ である。

(4) $\mathcal{E} \to \mathcal{E}^*; v \mapsto d\alpha(v, \cdot)$ の階数が $2n-2$ である。

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) $\square$

注意 1.1.9. E は 4 次元多様体、$\mathcal{E} \subset TE$ は階数 3 の分布とする。
　$\mathcal{E}$ が偶接触構造であるための必要十分条件は、いたる所で $d\alpha|_{\mathcal{E}} \neq 0$ なる局所的に定義された微分形式 α の核となることである。公式 $d\alpha(X,Y) = d(\alpha(Y))(X) - d(\alpha(X))(Y) - \alpha([X,Y])$ により、上記の条件は $\mathcal{E} + [\mathcal{E}, \mathcal{E}] = TE$ と同値である。

1.2 特性葉層

命題 1.2.1. $(E, \mathcal{E})$ を偶接触多様体とする。このとき、階数 1 の分布 $^{\exists!}\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$ であって、$[\mathcal{L}, \mathcal{E}] \subset \mathcal{E}$ を満たすものがただ一つ存在する。

証明. $\mathcal{E} \to \mathcal{E}^*; v \mapsto d\alpha(v, \cdot)$ の核を $\mathcal{L}$ とすれば、これは偶接触形式 α の取り方によらない。 $\square$

定義 1.2.2. 上記の $\mathcal{L}$ を偶接触多様体 $(E, \mathcal{E})$ の特性葉層 *(characteristic foliation)* と呼ぶ。

注意 1.2.3. $[X, X] = 0$ であることから、階数 1 の分布は常に積分可能である。すなわち、このような分布は常に葉層 (foliation) を定める。

命題 1.2.4. $(E, \mathcal{E})$ を $2n$ 次元偶接触多様体、$\mathcal{L}$ を $(E, \mathcal{E})$ の特性葉層とする。さらに、$2n-1$ 次元部分多様体 $M \subset E$ が $\mathcal{L}$ と横断的に交わっているとする。この時、$\xi \overset{\text{def}}{=} TM \cap \mathcal{E}$ は M 上の接触構造である。

証明. 局所的に偶接触形式 α を用いて $\mathcal{E} = Ker(\alpha)$ と表せば、下図より明らか。

$$\begin{tikzcd}
\xi \arrow[r, hook] \arrow[d, "v \mapsto d\alpha(v,\cdot)"'] & \mathcal{E} \cong \xi \oplus \mathcal{L} \arrow[d, "v \mapsto d\alpha(v,\cdot)"] & \mathcal{L} \arrow[l, hook'] \arrow[d, "0"] \\
\xi^* & \mathcal{E}^* \cong \xi^* \oplus \mathcal{L}^* \arrow[l, two heads] \arrow[r, two heads] & \mathcal{L}^*
\end{tikzcd}$$

$\square$

命題 1.2.5. $(E, \mathcal{E})$ を $2n$ 次元偶接触多様体、$\mathcal{L}$ を $(E, \mathcal{E})$ の特性葉層とする。$\mathcal{L}$ に接する任意のベクトル場 $X \in \Gamma(\mathcal{L})$ に対して、X の定める局所フロー $\rho_t = Exp(tX)$ は偶接触構造 $\mathcal{E}$ を保つ。

証明. 局所的に偶接触形式 α を用いて $\mathcal{E} = Ker(\alpha)$ と表す。これから示すべきことは、

$$\rho_t^* \alpha = h_t \alpha \; (^{\exists} h_t : \text{時間に依存する関数}) \tag{1}$$

である。

リー微分を計算すると $\mathcal{L}_X\alpha = (di_X + i_X d)\alpha = d\alpha(X,\cdot) \in Ker[T^*E \to \mathcal{E}^*]$ となる。今、$<\alpha>\subset Ker[T^*E \to \mathcal{E}^*]$ であるが、階数を比べれば $<\alpha>= Ker[T^*E \to \mathcal{E}^*]$ である。よって、次の式を得る。

$$\mathcal{L}_X\alpha = f\alpha \, (^\exists f : \text{関数}) \tag{2}$$

$\rho_t^*\mathcal{L}_X\alpha = \frac{d}{dt}\rho_t^*\alpha$ を用いて、(1) の未知関数 h_t が満たすべき微分方程式を求める。

$$\frac{d}{dt}h_t\alpha = (f\circ\rho_t)\rho_t^*\alpha = (f\circ\rho_t)h_t\alpha$$

より、

$$\frac{d}{dt}h_t = (f\circ\rho_t)h_t, h_0 = 1$$

である。これは具体的に $h_t = \exp(\int_0^t f\circ\rho_s ds)$ と解ける。この時、確かに (1) を満たす。 □

1.3 特性葉層の葉空間

(1.2.4) と (1.2.5) より、特性葉層の葉空間 $E/\mathcal{L}$ は接触構造 $\mathcal{E}/\mathcal{L}$ を持つ。ただし、一般に葉層の葉空間は多様体であるとは限らない。ここでは詳しく説明しないが、葉層構造論における局所安定性定理により、古典的には次のような十分条件が知られている。([12] などを参照。)

定理 1.3.1. *X は多様体、$\mathcal{F}$ は X 上の葉層構造とする。*

(1) $\mathcal{F}$ は、すべての葉がコンパクトであるとする。この時、すべてのホロノミー群が有限ならば、葉空間は orbifold である。

(2) 上の状況で、さらにすべてのホロノミー群が自明ならば、葉空間は多様体である。

さらに、Lie 亜群の理論を用いることにより、必要十分条件を記述することもできる。この文脈では、orbifold とは "proper かつ étale な Lie 亜群" と定義される。また、任意の葉層の葉空間は étale な Lie 亜群とみなせる。([7] などを参照。)

定理 1.3.2. *X は多様体、$\mathcal{F}$ は X 上の葉層構造とする。*

(1) ホロノミー亜群が固有 (proper) の時、かつその時に限り、葉空間は orbifold である。

(2) ホロノミー亜群が固有かつ自由の時、かつその時に限り、葉空間は多様体である。

2 Engel 構造

2.1 Engel 構造の定義

定義 2.1.1. E を 4 次元多様体、$\mathcal{D} \subset TE$ を分布とする。$\mathcal{D}$ を切断の層と同一視して、$\mathcal{D}^2 :\overset{\text{def}}{=} \mathcal{D} + [\mathcal{D},\mathcal{D}], \mathcal{D}^3 :\overset{\text{def}}{=} \mathcal{D}^2 + [\mathcal{D}^2,\mathcal{D}^2]$ とする。

$\mathcal{D}$ が E 上の *Engel* 構造であるとは、$rank(\mathcal{D}) = 2, rank(\mathcal{D}^2) = 3, rank(\mathcal{D}^3) = 4$ をみたすことである。4 次元多様体と *Engel* 構造の組 $(E,\mathcal{D})$ を *Engel* 多様体という。

$(E_1,\mathcal{D}_1), (E_2,\mathcal{D}_2)$ は *Engel* 多様体とする。*Engel* 準同型 $f : (E_1,\mathcal{D}_1) \to (E_2,\mathcal{D}_2)$ とは、局所微分同相写像 $f : E_1 \to E_2$ であって、各点で $df(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_2$ となるもののことである。

$(E,\mathcal{D})$ を Engel 多様体とすると、$\mathcal{E} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{D}^2$ は偶接触構造である。これを $(E,\mathcal{D})$ の偶接触構造と呼ぶことにする。4 次元偶接触多様体 $(E,\mathcal{E})$ の特性葉層を、$(E,\mathcal{D})$ の特性葉層と呼ぶ。

(1.2.4) より、特性葉層に横断的に交わる 3 次元部分多様体 M は接触構造 $TM \cap \mathcal{E}$ を持つ。さらに、E が Engel 構造を持つ場合、Legendrian 葉層 $TM \cap \mathcal{D}$ を持つ。

2.2 完備旗としての Engel 構造

命題 2.2.1. $(E,\mathcal{D})$ を *Engel* 多様体、$\mathcal{L}$ を $(E,\mathcal{D})$ の特性葉層とする。このとき、$\mathcal{L} \subset \mathcal{D}$ である。

証明. 局所的に $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ の補空間 V をとり、また $\mathcal{E} = Ker(\alpha)$ と表す。$\mathcal{E} \not\subset \mathcal{E}^2$ より、

$$^{\exists}X, Y \in \Gamma(\mathcal{E})\, s.t.\, \alpha([X,Y]) \neq 0$$

と表せる。$\mathcal{E} = \mathcal{D} \oplus V$ より、

$$X = X_1 + u, Y = Y_1 + v\, (X_1, Y_1 \in \Gamma(\mathcal{D}); u, v \in \Gamma(V))$$

と表せる。

$$0 \neq \alpha([X,Y]) = \alpha([X_1 + u, Y_1 + v]) = \alpha([X_1, v]) + \alpha([u, Y_1])$$

であるので、$\alpha([X_1, v]) \neq 0$ または $\alpha([u, Y_1]) \neq 0$ となるが、どちらの場合も次を得る。

$$^{\exists}X_0 \in \Gamma(\mathcal{D});^{\exists} u_0 \in \Gamma(V)\, s.t.\, \alpha([X_0, u_0]) \neq 0$$

すなわち、$\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{E} \to (\mathcal{E})^* \twoheadrightarrow V^*; Z \mapsto d\alpha(Z, \cdot)$ は全射である。よって、$Ker[\mathcal{D} \to V^*] \subset \mathcal{L}$ の階数を比べると、$Ker[\mathcal{D} \to V^*] = \mathcal{L}$ なので、$\mathcal{L} \subset \mathcal{D}$ である。 □

(2.2.1) により、完備旗 (complete flag)“$0 \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{E} \subset TE$”が定まる。Engel 構造は分布 $\mathcal{D}$ としての構造以上に、この完備旗の構造が重要である。

Engel 多様体 $(E,\mathcal{D})$ について、次の二つの写像は well-defined であり、Engel 構造の定義より 0 でない。階数を比べると、これらは同型である。

$$\mathcal{D} \wedge \mathcal{D} \to \mathcal{E}/\mathcal{D}; X \wedge Y \mapsto [X,Y]$$
$$(\mathcal{E}/\mathcal{L}) \wedge (\mathcal{E}/\mathcal{L}) \to TE/\mathcal{E}; \bar{X} \wedge \bar{Y} \mapsto [X,Y]$$

命題 2.2.2. $(E,\mathcal{D})$ を *Engel* 多様体とする。$\mathcal{E} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{D}^2$ には標準的な向きが存在する。

証明. $\mathcal{D} \wedge \mathcal{D} \cong \mathcal{E}/\mathcal{D}$ より、次の短完全列が存在する。

$$0 \to \mathcal{D} \to \mathcal{E} \to \mathcal{D} \wedge \mathcal{D} \to 0$$

よって、$\mathcal{D}$ と $\mathcal{D} \wedge \mathcal{D}$ の（局所的な）向きを指定すると、$\mathcal{E}$ の（局所的な）向きが自然に定まる。ここで、$\mathcal{D}$ の向きを定めると $\mathcal{D} \wedge \mathcal{D}$ の向きも定まり、$\mathcal{D}$ の向きを逆向きにとれば $\mathcal{D} \wedge \mathcal{D}$ も逆向きになる。しかし、これらの向きの組が $\mathcal{E}$ へ自然に導く向きは等しい。すなわち、$\mathcal{D}$ の向きの選び方によらず $\mathcal{E}$ の向きが一つ自然に定まる。 □

命題 2.2.3. $(E, \mathcal{D})$ を *Engel* 多様体とする。TE と $\mathcal{D}$ がどちらも向き付け可能ならば、$TE \cong E \times \mathbb{R}^4$（$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ E は平行化可能）である。

証明. $TE \cong \mathcal{L} \oplus (\mathcal{D}/\mathcal{L}) \oplus (\mathcal{E}/\mathcal{D}) \oplus (TE/\mathcal{E})$ と直線分解する。直線束は向き付け可能な時、かつその時に限り、自明である。よって、各 $\mathcal{L}, (\mathcal{D}/\mathcal{L}), (\mathcal{E}/\mathcal{D}), (TE/\mathcal{E})$ が向き付け可能であれば TE は自明である。そのためには、各 $\mathcal{L}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, TE$ が向き付け可能であればよい。仮定と (2.2.2) より、$\mathcal{D}, \mathcal{E}, TE$ は向き付け可能である。あとは、$\mathcal{L}$ が向き付け可能であればよい。

今、$(\mathcal{E}/\mathcal{L}) \wedge (\mathcal{E}/\mathcal{L}) \cong TE/\mathcal{E}$ は向き付け可能である。よって、$\mathcal{E}/\mathcal{L}$ が向き付け可能である。結局、$\mathcal{L}$ が向き付け可能であるので、E は平行化可能である。 □

(2.2.3) の逆問題、“E が平行化可能ならば Engel 構造を許容するか？”という問題を、E がコンパクトな場合に解決したのが T. Vogel である。[10] この問題の解決には h-原理 (h-principle) の手法が期待されていたが、Vogel は round ハンドル分解と貼り合わせの議論を用いてこれを解いた。その後、R. Casals や A. del Pino ら 4 名により Engel 構造に関する h-原理の存在が示された [2] ことで、Vogel の結果は一般化された。彼らの示した h-原理とは、“形式的 Engel 構造 (formal Engel structure)” と呼ばれる完備旗は Engel 構造にホモトピックである、というものであった。

定義 2.2.4. 完備旗 “$0 \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{E} \subset TE$”が形式的 *Engel* 構造であるとは、$\mathcal{D} \wedge \mathcal{D} \cong \mathcal{E}/\mathcal{D}, (\mathcal{E}/\mathcal{L}) \wedge (\mathcal{E}/\mathcal{L}) \cong TE/\mathcal{E}$ なる同型が存在することである。

2.3 Cartan 延長と展開写像

(M, ξ) は 3 次元接触多様体とする。$E = \mathbb{P}(\xi) \overset{\text{def}}{=} \coprod_{x \in M} \mathbb{P}(\xi_x) = (\xi - 0)/\mathbb{R}^\times$ は接触構造 ξ の射影化とし、$\pi : E \to M$ は自然な射影とする。 E 上の階数 2 の分布 $\mathcal{D}$ を次のように定める。

各 $l \in E$ with $\pi(l) = x$ に対し、$l \subset \mathbb{P}(\xi_x)$ は原点を通る直線である。そこで、$\mathcal{D}_l \overset{\text{def}}{=} d\pi_l^{-1}(l) \subset T_l E$ とする。

同様に、$E' = \mathbb{S}(\xi) \overset{\text{def}}{=} (\xi - 0)/\mathbb{R}_{>0}$ とする。E' は E 上の 2-被覆空間である。 E' 上の階数 2 の分布 $\mathcal{D}'$ を $\mathcal{D}$ の引き戻しとして定義する。$\pi' : E' \to M$ は自然な射影とする。

命題 2.3.1.

(1) 上記の $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ は E, E' 上の *Engel* 構造である。

$(E, \mathcal{D}), (E', \mathcal{D}')$ の偶接触構造を $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ とし、特性葉層を $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ とする。

(2) $\mathcal{E} = d\pi^{-1}(\xi), \mathcal{E}' = (d\pi')^{-1}(\xi)$ である。

(3) $\mathcal{L} = Ker(d\pi), \mathcal{L}' = Ker(d\pi')$ である。

証明. $(E, \mathcal{D})$ についてのみ示せばよい。まず、M 上で局所的に議論すれば十分なので、$\xi =< X, Y >$ と表してよい。この時、

$$M \times S^1 \to E; (x, \theta) \mapsto < \cos(\frac{\theta}{2}) X_x + \sin(\frac{\theta}{2}) Y_x >$$

は微分同相写像である。この同一視によって、E 上のベクトル場 $u \overset{\text{def}}{=} \cos(\frac{\theta}{2})X+\sin(\frac{\theta}{2})Y, v \overset{\text{def}}{=} -\sin(\frac{\theta}{2})X+\cos(\frac{\theta}{2})Y$ を定める。(これは局所的には well-defined である。)

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{(x,\theta)} &= d\pi_l^{-1}(< \cos(\frac{\theta}{2})X_x+\sin(\frac{\theta}{2})Y_x >)\\ &= < \partial_\theta, u_{(x,\theta)} >\end{aligned}$$

が各点で成り立つので、$\mathcal{D} =< \partial_\theta, u >$ である。$[\partial_\theta, u] = \frac{1}{2}v$ より、$\mathcal{D}^2 =< \partial_\theta, u, v >=< \partial_\theta, X, Y >= d\pi^{-1}(\xi)$ である。ξ が接触構造であることから、これは偶接触構造である。よって、$\mathcal{D}$ は Engel 構造である。また、$[\partial_\theta, X] = [\partial_\theta, Y] = 0$ より $< \partial_\theta >= Ker(d\pi)$ は特性葉層である。 □

定義 2.3.2 (Cartan 延長)**.**

(1) (2.3.1) *の* $(E, \mathcal{D})$ *を* $M, \xi)$ *の Cartan 延長 (Cartan prolongation) と呼ぶ。以下、これを* $\mathbb{P}(M, \xi)$ *と表す。*

(2) (2.3.1) *の* $(E', \mathcal{D}')$ *を* $M, \xi)$ *の向き付けられた Cartan 延長 (oriented Cartan prolongation) と呼ぶ。以下、これを* $\mathbb{S}(M, \xi)$ *と表す。*

注意 2.3.3. (2.3.1) の (3) より、$\mathbb{P}(M, \xi), \mathbb{S}(M, \xi)$ の特性葉層の葉空間は M である。(1.2.4) と (1.2.5) より、M は接触構造 $\mathcal{E}/\mathcal{L}$ をもつ。(2.3.1) の (2) より、これは ξ に一致する。

命題 2.3.4. 関手 $(M, \xi) \mapsto \mathbb{P}(M, \xi)$ は充満忠実である。

証明. 明らかに忠実である。充満であることを示す。

$(M_1, \xi_1), (M_2, \xi_2)$ は3次元接触多様体として、Engel 準同型 $f : \mathbb{P}(M_1, \xi_1) \to \mathbb{P}(M_2, \xi_2)$ を任意にとる。f は特性葉層を保つので、その葉空間の間の写像として $g : (M_1, \xi_1) \to (M_2, \xi_2)$ を導く。すなわち、g は次の図式を可換にする唯一の写像である。

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}(M_1,\xi_1) \arrow[r, two heads, "\pi_1"] \arrow[d, "f"'] & (M_1,\xi_1) \arrow[d, "g"] \\ \mathbb{P}(M_2,\xi_2) \arrow[r, two heads, "\pi_2"] & (M_2,\xi_2) \end{tikzcd}$$

(1.2.4) と (1.2.5) より、g は接触準同型である。これから、$f = \mathbb{P}g$ を示す。

$\mathbb{P}(M_i, \xi_i)$ の Engel 構造を $\mathcal{D}_i$ と表す。${}^\forall l \in \mathbb{P}(M_i, \xi_i)$ に対し、$l = d\pi_i((\mathcal{D}_i)_l) \subset \xi_i$ である。よって、${}^\forall l \in \mathbb{P}(M_1, \xi_1)$ に対し、

$$\begin{aligned} f(l) &= d\pi_2((\mathcal{D}_2)_{f(l)})\\ &= d\pi_2 \circ df((\mathcal{D}_1)_l)\\ &= dg \circ d\pi_1((\mathcal{D}_1)_l)\\ &= dg(l)\\ &= \mathbb{P}g(l)\end{aligned}$$

□

Cartan 延長は、ファイバー束構造を持つ Engel 多様体のうち"最小"の Engel 多様体である。

$(E, \mathcal{D})$ を Engel 多様体とする。M は $(E, \mathcal{D})$ の特性葉層の葉空間として、$\pi : E \to M$ は商写像とする。また、M は多様体であると仮定する。(1.2.4) と (1.2.5) より、M は接触構造 $\xi \overset{\text{def}}{=} \mathcal{E}/\mathcal{L}$ をもつ。

そこで、$\phi : (E, \mathcal{D}) \to \mathbb{P}(M, \xi)$ を、$\phi(p) \overset{\text{def}}{=} d\pi(\mathcal{D}_p) \subset \xi_{\pi(p)}$ によって定める。この ϕ を展開写像 (development map) という。

補題 2.3.5. 上記の ϕ は *Engel* 準同型である。

証明. E 上で局所的に議論すれば十分なので、特性葉層 $\mathcal{L}$ に関する葉層近傍をとることにより、$E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, M = \mathbb{R}^3, \mathcal{L} = T\mathbb{R}$ としてよい。また、E の座標を $(t, x, y, z) = (t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ で表す。

今、E, M は可縮なので、E 上のベクトル場 u および M 上のベクトル場 X, Y で、$\mathcal{D} =< \partial_t, u >, \xi =< X, Y >$ を満たすものがとれる。さらに、必要ならば線形変換で置き換えることにより、u は $T\mathbb{R}^3$ に接するとしてよい。

$u = fX + gY$ (f, g は E 上の関数) と表せる。よって、$\phi(t, \boldsymbol{x}) =< u_{(t,\boldsymbol{x})} >$ は滑らかである。また、必要ならば規格化することにより、$\sqrt{f^2 + g^2} = 1$ としてよい。(2.3.1) と同様の同一視により、$\mathbb{P}(M, \xi) \cong \mathbb{R}^3 \times S^1$ とすると、$\phi(t, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \theta(t, \boldsymbol{x}))$ と表せる。ただし、θ は $f = \cos(\frac{1}{2}\theta), g = \sin(\frac{1}{2}\theta)$ を満たす S^1 値関数である。すると $(\partial_t \theta)^2 = 4(\partial_t f)^2 + 4(\partial_t g)^2$ であるが、$(\partial_t f)X + (\partial_t)Y = [\partial_t, u] \neq 0$ なので、結局 $\partial_t \theta \neq 0$ である。すなわち $det(d\phi) \neq 0$ であるので、ϕ は局所微分同相写像である。

最後に、$d\phi(\partial_t) = d\theta(\partial_t), d\phi(u) = u + d\theta(u)$ はどちらも $\mathbb{P}(M, \xi)$ の Engel 構造に含まれる。よって、ϕ は Engel 構造を保つ。 □

命題 2.3.6 (普遍性)**.** 別の 3 次元接触多様体 (N, ξ_N) および *Engel* 局所同相 $\psi : E \to \mathbb{P}(\xi_N)$ が存在した時、次の図式を可換にする局所接触同相 $\tilde{\psi} : M \to N$ がただ一つ存在する。

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \mathbb{P}(M, \xi) \arrow[d, "\mathbb{P}\tilde{\psi}"] \\ & \mathbb{P}(N, \xi_N) \end{tikzcd}$$

証明. ψ が葉空間の間に導く接触準同型を $\tilde{\psi}$ とする。${}^{\forall}p \in E$ に対し、

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\tilde{\psi} \circ \phi(p) &= d\tilde{\psi} \circ d\pi(\mathcal{D}_p) \\ &= d\pi_N \circ d\psi(\mathcal{D}_p) \\ &= d\pi_N((\mathcal{D}_N)_{\psi(p)}) \\ &= \psi(p) \end{aligned}$$

逆に、このような性質を満たす別の接触準同型 $\tilde{\psi}'$ が存在したとする。上記の可換図式

より葉空間に導かれる可換図式は、次のようになる。

$$\begin{tikzcd}
(M,\xi) \arrow[r, equal] \arrow[dr, "\tilde{\psi}"'] & (M,\xi) \arrow[d, "\tilde{\psi}'"] \\
& (N,\xi_N)
\end{tikzcd}$$

すなわち、$\tilde{\psi}' = \tilde{\psi}$ である。よって一意性も示された。 □

(M,ξ) は3次元接触多様体とする。自然な射影 $\pi : \mathbb{P}(M,\xi) \to M$ の切断 $s : M \to \mathbb{P}(M,\xi)$ は、(M,ξ) 上の Legendrian 葉層 $s^{-1}(s(TM) \cap \mathcal{D})$ を自然に定める。この対応は全単射である。

$$\{Cartan\ 延長の切断\ \} \xleftrightarrow{1:1} \{Legendrian\ 葉層\ \}$$

2.4 Darboux の定理

例 2.4.1. $\mathbb{R}^4$ 上の分布 $Ker(dy - zdx) \cap Ker(dz - wdx)$ は Engel 構造である。

すべての Engel 多様体は、局所的には上記の例の原点周りに同型である。これは所謂 Darboux の定理と呼ばれる形の主張で、100 年以上昔に Engel によって証明された [3] 結果である。Engel 構造の呼び名は彼に由来する。これから、Engel 多様体の Darboux の定理を証明しよう。ただし、接触多様体の Darboux の定理は既知のものとする。

まず、局所的に議論すれば十分なので、特性葉層に関する葉層近傍をとることにより、特性葉層の葉空間は多様体としてよい。すると、展開写像が定義できるので、任意の Engel 多様体は局所的にはある接触多様体の Cartan 延長に同型であることがわかる。さらに、接触多様体に関する Darboux の定理より、葉空間は局所的には標準的な接触構造に同型である。後は、葉空間の点を一つ固定した時、その上のファイバーの任意の二つの点が互いに同型で移り合うことが示されれば十分である。

$\mathbb{R}^3$ 上の分布 $\xi_{std} \overset{\text{def}}{=} Ker(dz + xdy - ydx)$ は接触構造である。$X \overset{\text{def}}{=} \partial_x + y\partial_z, Y \overset{\text{def}}{=} \partial_y - x\partial_z$ とすると、$\xi_{std} =< X, Y >$ である。$u_\theta \overset{\text{def}}{=} \cos(\frac{1}{2}\theta)X + \sin(\frac{1}{2}\theta)Y$ とすると、$\mathbb{R}^3 \times S^1 \cong \mathbb{P}(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ なる同型は $(\boldsymbol{x}, \theta) \mapsto < (u_\theta)_{\boldsymbol{x}} >$ によって与えられる。

各 $\Theta \in S^1$ に対して $\eta_\Theta : (\mathbb{R}^3, \xi_{std}) \to (\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ を、

$$\eta_\Theta(x,y,z) \overset{\text{def}}{=} (x\cos(\Theta) - y\sin(\Theta), x\sin(\Theta) + y\cos(\Theta), z)$$

によって定めると、これは接触同型である。

これらは原点において、$X_0 = \partial_x, Y_0 = \partial_y, (\xi_{std})_0 =< \partial_x, \partial_y >, (d\eta_\Theta)_0(u_\theta) = u_{2\Theta+\theta}$ となる。すなわち、$\mathbb{P}\eta_\Theta : \mathbb{R}^3 \times S^1 \to \mathbb{R}^3 \times S^1$ は $\mathbb{P}\eta_\Theta(0,\theta) = (0, 2\Theta + \theta)$ を満たす。

以上より、任意の $^\forall\theta_1, \theta_2 \in S^1$ に対し、ある $^\exists\Theta \in S^1$ が存在して、$\mathbb{P}\eta_\Theta(0,\theta_1) = (0,\theta_2)$ を満たす。

まとめると、次が示されたことになる。

定理 2.4.2 (F. Engel)**.** $(E, \mathcal{D})$ を *Engel* 多様体とし、任意の点 $p \in E$ をとる。この時、p まわりのチャート $(U; x, y, z, w)$ であって、$\mathcal{D}|_U = Ker(dy - zdx) \cap Ker(dz - wdx)$ を満たすものが存在する。

2.5　展開写像の一般化

(2.3) では、特性葉層の葉空間が多様体になる場合のみ扱った。しかし、(1.3) の通り、orbifold の言葉を用いればより多くの、Lie 亜群の言葉を用いればすべての Engel 多様体に対して展開写像を定義することができる。ただし、orbifold や Lie 亜群の圏の射は定義が少し複雑であるので、ここでは定義しない。詳しくは [7] などを参照するとよい。

定義 2.5.1. すべての射が逆射を持つ圏のことを亜群 *(groupoid)* という。より具体的には、亜群とは次の *7* つのデータ $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, s, t, i, inv, comp)$ からなり、可換図式によって定義される適切な公理を満たすものである。

- $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1$ は集合であり、それぞれ対象集合、射集合と呼ばれる。
- $s, t : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_0, i : \mathcal{G}_0 \to \mathcal{G}_1, inv : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_1$ は写像であり、それぞれ始域、終域、単位射、逆射と呼ばれる。
- $comp : \mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}_1$ は演算（すなわちこれも写像）であり、合成と呼ばれる。ただし、$\mathcal{G}_2 \overset{\text{def}}{=} \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 = \{(g, h) \in \mathcal{G}_1^2 \mid s(g) = t(h)\}$ である。

定義 2.5.2. *Lie* 亜群とは、亜群 $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, s, t, i, inv, comp)$ であって、次を満たすもののことである。

- $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1$ は多様体である。
- $s, t : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_0, i : \mathcal{G}_0 \to \mathcal{G}_1, inv : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_1$ は滑らかな写像であり、s, t はさらに（全射）沈め込みである。
- 上記の条件により $\mathcal{G}_2$ も多様体であるが、$comp : \mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}_1$ も滑らかである。

各 $x \in \mathcal{G}_0$ に対して $\mathcal{G}_x \overset{\text{def}}{=} (s \times t)^{-1}(x, x) \subset \mathcal{G}_1$ は群の構造を持つが、これを $\mathcal{G}$ の x における等方群 *(isotoropy group)* または局所群 *(local group)* と呼ぶ。

例 2.5.3. $G \curvearrowright M$ は Lie 群の作用する多様体とする。この時、$\mathcal{G}_0 \overset{\text{def}}{=} M, \mathcal{G}_1 \overset{\text{def}}{=} G \times M, s(g, x) \overset{\text{def}}{=} x, t(g, x) \overset{\text{def}}{=} g \cdot x$ とすると、$\mathcal{G} \overset{\text{def}}{=} (\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1)$ は Lie 亜群である。

定義 2.5.4.

- *Lie* 亜群 $\mathcal{G}$ が *étale* であるとは、s, t が局所微分同相写像であることである。($dim(\mathcal{G}_0) = dim(\mathcal{G}_1)$ と定義してもよい。)
- *Lie* 亜群が固有 *(proper)* であるとは、$s \times t : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_0 \times \mathcal{G}_0$ が固有写像であることである。
- *Lie* 亜群が自由 *(free)* であるとは、$s \times t : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_0 \times \mathcal{G}_0$ が単射であることである。
- *étale* かつ固有な *Lie* 亜群を *orbifold* と呼び、自由な *orbifold* を多様体と呼ぶ。

定義 2.5.5. 接触 *(étale) Lie* 亜群とは、*Lie* 亜群 $\mathcal{G}$ であって、$\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1$ が接触多様体であり、s, t が接触準同型であることである。

Engel (étale) Lie 亜群とは、*Lie* 亜群 $\mathcal{G}$ であって、$\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1$ が *Engel* 多様体であり、s, t が接 *Engel* 準同型であることである。

接触 *étale Lie* 亜群 $\mathcal{G}$ が正 *(positiv)* であるとは、各点 $x \in \mathcal{G}_0$ で等方群の、接触構造のファーバーへの作用 $\mathcal{G}_x \curvearrowright \xi_x$ が向きを保つことである。

3 次元接触 *étale Lie* 亜群 $\mathcal{G}$ に対し、$\mathbb{P}(\mathcal{G}) \overset{\mathrm{def}}{=} (\mathbb{P}(\mathcal{G}_0), \mathbb{P}(\mathcal{G}_1))$ を $\mathcal{G}$ の *Cartan* 延長と言い、$\mathbb{S}(\mathcal{G}) \overset{\mathrm{def}}{=} (\mathbb{S}(\mathcal{G}_0), \mathbb{S}(\mathcal{G}_1))$ を $\mathcal{G}$ の向き付けられた *Cartan* 延長と言う。

$\mathbb{P}(\mathcal{G})$ は Engel étale Lie 亜群である。これが orbifold であるための必要十分条件は、$\mathcal{G}$ が orbifold であることである。

命題 2.5.6. $\mathcal{G}$ を 3 次元接触 *étale Lie* 亜群とする。$\mathcal{G}$ が固有である時、かつその時に限り、$\mathbb{P}(\mathcal{G})$ は固有である。

証明. 次の可換図式より明らか。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(\mathcal{G}_1) \arrow[r, "固有"] \arrow[d, "s\times t"'] & \mathcal{G}_1 \arrow[d, "s\times t"] \\
\mathbb{P}(\mathcal{G}_0) \times \mathbb{P}(\mathcal{G}_0) \arrow[r, "固有"] & \mathcal{G}_0 \times \mathcal{G}_0
\end{tikzcd}$$

□

例 2.5.7. $\xi_{std} \overset{\mathrm{def}}{=} Ker(dz + xdy - ydx)$ は $\mathbb{R}^3$ 上の接触構造である。$\phi_n, \psi : (\mathbb{R}^3, \xi_{std}) \to (\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ を $\phi_n \overset{\mathrm{def}}{=} \eta_{\frac{2\pi}{n}}, \psi(x, y, z) \overset{\mathrm{def}}{=} (x, -y, -z)$ で定めると、これは接触同型である。$G_{n,std} \overset{\mathrm{def}}{=} < \phi_n, \psi > \curvearrowright (\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ と $H_{n,std} \overset{\mathrm{def}}{=} < \phi_n > \curvearrowright (\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ は有限群の接触作用である。よって、(2.5.3) により 3 次元接触 étale Lie 亜群が定まる。これは固有であるので、3 次元接触 orbifold である。$G_{n,std} \curvearrowright (\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ からは正でない接触 orbifold が、$H_{n,std} \curvearrowright (\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ からは正である接触 orbifold が得られる。

orbifold は、局所的には有限群の作用する多様体 $G \curvearrowright U$ に同型である。この時、U 上のリーマン計量であって、G の作用について不変であるものが存在する。（実際、U 上の勝手なリーマン計量を G で平均化すればよい。）すなわち G は直交群の部分群である。

3 次元接触 orbifold の場合、G は接触構造を保つので、これは 3 次直交群の部分群であって、平面を保つものに同型である。すなわち、3 次元接触 orbifold の等方群は、すべて (2.5.7) のいずれかに同型である。あとは通常の接触多様体と同様、Moser のトリック [4] により、次の定理を得る。

定理 2.5.8 (接触 3-orbifold の Darboux の定理)**.** すべての 3 次元接触 *orbifold* は、局所的には *(2.5.7)* の原点周りに同型である。

一般に 3 次元接触 étale Lie 亜群の Cartan 延長は Engel étale Lie 亜群となるため、展開写像は Engel 多様体の圏をはみ出してしまう。Engel 多様体の圏で上手く閉じるための条件は、次の定理で与えられる。

定理 2.5.9 (Y. [11]). $\mathcal{G}$ を 3 次元接触 *étale Lie* 亜群とする。

(1) $\mathcal{G}$ が正かつ固有かつすべての等方群の位数が奇数の時、かつその時に限り、$\mathbb{P}(\mathcal{G})$ は多様体である。

(2) $\mathcal{G}$ が正かつ固有の時、かつその時に限り、$\mathbb{S}(\mathcal{G})$ は多様体である。

定理の証明は、(2.5.6) , (2.5.8) より、次の補題に帰着される。

補題 2.5.10. *(1)* $G_{n,std} \curvearrowright \mathbb{P}(\xi_{std})_0, G_{n,std} \curvearrowright \mathbb{S}(\xi_{std})_0$ は自由ではない。

(2) n が奇数の時、かつその時に限り、$H_{n,std} \curvearrowright \mathbb{P}(\xi_{std})_0$ は自由である。

(3) $H_{n,std} \curvearrowright \mathbb{S}(\xi_{std})_0$ は常に自由である。

証明. 定義を思い出しておこう。

$\xi_{std} = Ker(dz + xdy - ydx), G_{n,std} =< \phi_n, \psi >, H_{n,std} =< \phi_n >, \phi_n(x,y,z) = (x\cos(\frac{2\pi}{n}) - y\sin(\frac{2\pi}{n}), x\sin(\frac{2\pi}{n}) + y\cos(\frac{2\pi}{n}), z), \psi(x,y,z) = (x,-y,-z)$

特に、$(\xi_{std})_0 = Ker(dz) =< \partial_x, \partial_y >$.

(1) $d\psi(\partial_x) = \partial_x$ より明らか。

(2),(3) $v_\theta \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\cos\theta)\partial_x + (\sin\theta)\partial_y$ と置く。$\mathbb{P}(\xi_{std})_0$ と $\mathbb{S}(\xi_{std})_0$ は v_θ によって生成される。$\theta_1 \equiv \theta_2 \bmod \pi$ の時、かつその時に限り、$v_{\theta_1} \equiv v_{\theta_2}$ in $\mathbb{P}(\xi_{std})_0$ である。同様に、$\theta_1 \equiv \theta_2 \bmod 2\pi$ の時、かつその時に限り、$v_{\theta_1} \equiv v_{\theta_2}$ in $\mathbb{S}(\xi_{std})_0$ である。

$$\begin{aligned} d\phi_n(v_\theta) &= (\cos\theta\cos(\frac{2\pi}{n}) - \sin\theta\sin(\frac{2\pi}{n}))\partial_x + (\cos\theta\sin(\frac{2\pi}{n}) + \sin\theta\cos(\frac{2\pi}{n}))\partial_y \\ &= \cos(\theta + \frac{2\pi}{n})\partial_x + \sin(\theta + \frac{2\pi}{n})\partial_y \\ &= v_{\theta+\frac{2\pi}{n}}. \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} d\phi_n^k(v_\theta) \equiv v_\theta \text{ in } \mathbb{P}(\xi_{std})_0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2k \equiv 0 \bmod n. \\ d\phi_n^k(v_\theta) \equiv v_\theta \text{ in } \mathbb{S}(\xi_{std})_0 \quad &\Leftrightarrow \quad k \equiv 0 \bmod n. \end{aligned}$$

すなわち、$H_{n,std} \curvearrowright \mathbb{S}(\xi_{std})_0$ は常に自由である。また、n が奇数の時、$H_{n,std} \curvearrowright \mathbb{P}(\xi_{std})_0$ は自由であり、それ以外の時、$H_{n,std} \curvearrowright \mathbb{P}(\xi_{std})_0$ は自由でない。

□

3 応用

3.1 展開写像による分類

$\mathcal{G}$ は 3 次元接触 orbifold で、$\mathbb{P}(\mathcal{G})$ が多様体であったとする。このとき、$\mathbb{P}(\mathcal{G})$ 上の被覆空間 $\phi : E \to \mathbb{P}(\mathcal{G})$ は E 上の Engel 構造を導く。さらに、この特性葉層は $\mathcal{G}$ を葉空間として持つ。よって、ϕ は E の展開写像に一致する。つまり、展開写像が多様体を終域に持ち、その上の被覆空間となる Engel 多様体の分類は、Cartan 延長の上の被覆空間を分類することに帰着される。例えば次のような結果がある。

定理 3.1.1 (M. Klukas, B. Sahamie [6])**.** (M,ξ) を 3 次元接触多様体とする。オイラー類 $e(\mathbb{P}(M,\xi))\in H^2(M,\mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}_n$ 係数への簡約 $e_n(\mathbb{P}(M,\xi))\in H^2(M,\mathbb{Z}_n)$ が *0* になる時、かつその時に限り、*Cartan* 延長 $\mathbb{P}(M,\xi)$ の上の n-被覆が存在する。このとき、$\mathbb{P}(M,\xi)$ の上の n-被覆の同型類は $H^1(M,\mathbb{Z}_n)$ の元と一対一に対応する。

では、展開写像が多様体を終域に持ち、その上の被覆空間と "ならない"Engel 多様体について、どのようなことが言えるだろうか。例えば、次のようなことが言える。

$Aut(E,\mathcal{D})$ は Engel 自己同相群とする。このとき、二つの関手の合成 $(E,\mathcal{D})\mapsto(E/\mathcal{L},\mathcal{E}/\mathcal{L})\mapsto\mathbb{P}(E/\mathcal{L},\mathcal{E}/\mathcal{L})$ によって、群準同型 $\Phi: Aut(E,\mathcal{D})\to Aut(E/\mathcal{L},\mathcal{E}/\mathcal{L})\cong Aut(\mathbb{P}(E/\mathcal{L},\mathcal{E}/\mathcal{L}))$ が導かれる。

定理 3.1.2 (Y.)**.** $\mathbb{P}(E/\mathcal{L},\mathcal{E}/\mathcal{L})$ が多様体で、展開写像が被覆写像でないとする。この時、上記の Φ は単射である。

3.2 境界と貼り合わせ

E を境界付き多様体とし、$\mathcal{D}$ を E 上の Engel 構造とする。さらに、E の境界の連結成分 $M\subset\partial E$ が特性葉層に横断的に交わっているとする。この時、M 上の接触構造 $\xi\overset{\text{def}}{=}TM\cap\mathcal{E}$ および Legendrian 葉層 $V\overset{\text{def}}{=}TM\cap\mathcal{D}$ が定まる。

カラー近傍をとることにより、特性葉層 $\mathcal{L}$ は M 付近で向き付けられているとしてよい。すなわち、境界で外向きとなる方向を正としておく。(2.2.2) より $\mathcal{E}$ は向き付けられているので、$\xi\overset{\text{def}}{=}\mathcal{E}/\mathcal{L}$ は向き付けられているとしてよい。

定理 3.2.1. E_1,E_2 を境界付き多様体とし、$\mathcal{D}_i$ を E_i 上の *Engel* 構造とする。さらに、E_i の境界の連結成分 $M_i\subset\partial E_i$ が特性葉層に横断的に交わっているとする。この時、M_i 上の向き付けられた接触構造 $\xi_i\overset{\text{def}}{=}TM_i\cap\mathcal{E}_i$ および *Legendrian* 葉層 $V_i\overset{\text{def}}{=}TM_i\cap\mathcal{D}_i$ が定まる。

$f:(M_1,\xi_1,V_1)\to(M_2,\xi_2,V_2)$ は *Legendrian* 葉層を保つ接触同型で、接触構造の向きを反転させるものとする。このとき、f による貼り合わせ $E_1\cup_f E_2$ 上の *Engel* 構造であって、各 E_i の埋め込みが *Engel* 構造を保つようなものがただ一つ存在する。

証明. Legendrian 葉層 V_i は、Cartan 延長 $\mathbb{P}(M_i,\xi_i)$ の切断を定める。この切断の近傍と、M_i のカラー近傍を展開写像によって張り合わせればよい。 □

参考文献

[1] Jiro Adachi. Engel structures with trivial characteristic foliations. *Algebraic & Geometric Topology*, 2(1):239–255, 2002.

[2] Roger Casals, José Luis Pérez, Álvaro del Pino, and Francisco Presas. Existence h-principle for engel structures. *Inventiones mathematicae*, 210(2):417–451, 2017.

[3] Friedrich Engel. Zur invariantentheorie der systeme pfaff'scher gleichungen. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse*, 41:157–176, 1889.

[4] Hansjörg Geiges. *An introduction to contact topology*, volume 109. Cambridge University Press, 2008.

[5] Alexander Golubev. On the global stability of maximally nonholonomic two-plane fields in four dimensions. *International Mathematics Research Notices*, 1997(11):523–529, 1997.

[6] Mirko Klukas and Bijan Sahamie. On prolongations of contact manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 141(9):3257–3263, 2013.

[7] Ieke Moerdijk and Janez Mrcun. *Introduction to foliations and Lie groupoids*, volume 91. Cambridge University Press, 2003.

[8] Richard Montgomery. Generic distributions and lie algebras of vector fields. *Journal of differential equations*, 103(2):387–393, 1993.

[9] Richard Montgomery. Engel deformations and contact structures. *Translations of the American Mathematical Society-Series 2*, 196:103–118, 1999.

[10] Thomas Vogel. Existence of engel structures. *Annals of mathematics*, pages 79–137, 2009.

[11] Koji Yamazaki. Engel manifolds and contact 3-orbifolds. *arXiv preprint 1811.09076*, 2018.

[12] 田村一郎. 葉層のトポロジー. *数学選書, 岩波書店*, 1976.

[13] 本間泰史. シンプレクティック幾何入門.